1. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

A. TÓM TẮC LÝ THUYẾT

Nội dung phương pháp quy nạp toán học

Cho n_0 *là một số nguyên dương và* $P(n)$ *là một mệnh đề có nghĩa với mọi số tự nhiên* $n \ge n_0$. *Nếu*

(1) $P(n_0)$ *là đúng và*

(2) Nếu $P(k)$ *đúng, thì* $P(k+1)$ *cũng đúng với mọi số tự nhiên* $k \ge n_0$;

thì mệnh đề P(n) đúng với mọi số tự nhiên $n \ge n_0$.

Khi ta bắt gặp bài toán:

Chứng minh mệnh đề $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \ge n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ ta có thể sử dụng phương pháp quy nạp như sau

Bước 1: Kiểm tra $P(n_0)$ có đúng hay không. Nếu bước này đúng thì ta chuyển qua bước hai

Bước 2: Với $k \ge n_0$, giả sử $P(k)$ đúng ta cần chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng.

Kết luận: $P(n)$ đúng với $\forall n \ge n_0$.

Lưu ý: Bước 2 gọi là bước quy nạp, mệnh đề $P(k)$ đúng gọi là giả thiết quy nạp.

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Vấn đề 1. Dùng quy nạp để chứng minh đẳng thức. Bất đẳng thức

Phương pháp .

Phương pháp: Giả sử cần chứng minh đẳng thức $P(n) = Q(n)$ (hoặc $P(n) > Q(n)$) đúng với $\forall n \ge n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tính $P(n_0)$, $Q(n_0)$ rồi chứng minh $P(n_0) = Q(n_0)$

Bước 2: Giả sử $P(k) = Q(k);\ k \in \mathbb{N}, k \ge n_0$, ta cần chứng minh $P(k+1) = Q(k+1)$.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Chứng mình với mọi số tự nhiên $n \ge 1$ ta luôn có: $1+2+3+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Ví dụ 2. Chứng minh với mọi số tự nhiên $n \ge 1$ ta luôn có: $1+3+5+...+2n-1 = n^2$

Ví dụ 3. Chứng minh rằng với $\forall n \ge 1$, ta có bất đẳng thức: $\dfrac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6.2n} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$

Ví dụ 4. Chứng minh rằng với $\forall n \ge 1, \forall x > 0$ ta có bất đẳng thức: $\dfrac{x^n(x^{n+1}+1)}{x^n+1} \le \left(\dfrac{x+1}{2}\right)^{2n+1}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Chú ý: Trong một số trường hợp để chứng minh mệnh đề $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên n ta có thể chứng minh theo cách sau

Bước 1: Ta chứng minh $P(n)$ đúng với $n = 1$ và $n = 2^k$

Bước 2: Giả sử $P(n)$ đúng với $n = k+1$, ta chứng minh $P(n)$ đúng với $n = k$.

Cách chứng minh trên được gọi là quy nạp theo kiểu Cauchy (Cô si).

1I. BÀI TẬP TỰ LUẬN TỰ LUYỆN

Bài 1 Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \ge 1$, ta luôn có

1. $1^2+2^2+...+(n-1)^2+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2. $\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+...+\frac{n}{3^n}=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4.3^n}$

Bài 2 Chứng minh các đẳng thức sau

1. $1.2+2.3+...+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ với $\forall n\ge 1$

2. $\frac{1}{1.5}+\frac{1}{5.9}+\frac{1}{9.13}+...+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$

3. $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

4. $\left(1-\frac{4}{1}\right)\left(1-\frac{4}{9}\right)\left(1-\frac{4}{25}\right)...\left(1-\frac{4}{(2n-1)^2}\right)=\frac{1+2n}{1-2n}$

5. $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

6. $1.2^2+2.3^2+3.4^2+...+(n-1).n^2=\frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$, $\forall n\ge 2$

7. $2^2+4^2+...+(2n)^2=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$

8. $1.2.3+2.3.4+...+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

Với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

9. $1.2^2+2.3^2+3.4^2+...+(n-1).n^2=\frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$ với $\forall n\ge 2$.

10. $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ Với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

Bài 3

1. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n\ge 1$ ta có:

$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ (n dấu căn)

2. Chứng minh các đẳng thức $\sin x+\sin 2x+...\sin nx=\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ với $x\ne k2\pi$ với $n\ge 1$.

Bài 4 Chứng minh rằng với mọi $n\ge 1$ ta có bất đẳng thức:

$|\sin nx|\le n|\sin x|$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Bài 5

1. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n\ge 1$, ta có : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$

2. $3^n>3n+1$ với mọi số tự nhiên $n\ge 2$;

3. $\frac{2.4.6.2n}{1.3.5...(2n-1)}>\sqrt{2n+1}$ với mọi số tự nhiên $n\ge 1$;

Bài 6 Cho hàm số f xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$ và thoả mãn điều kiện : $f(x+y)\ge f(x).f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ (*). Chứng minh rằng với mọi số thực x và mọi số tự nhiên n ta có : $f(x)\ge\left[f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right]^{2n}$

Bài 7 Chứng minh các bất đẳng thức sau

1. $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$ $\forall n\ge 2$

2. $\sqrt{n}<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}....+\frac{1}{\sqrt{n}}\le 2\sqrt{n}$

3. $\tan n\alpha>n\tan\alpha$ với $0<\alpha<\frac{\pi}{4(n-1)}$

4. $2^n>2n+1$ $\forall n\ge 3$

5. $2^{n+2}>2n+5, (\forall n\in\mathbb{N}^*)$

6. $3^{n-1}>n(n+2); (\forall n\in\mathbb{N}^*, n\ge 4)$

7. $2^{n-3}>3n-1; (\forall n\in\mathbb{N}^*, n\ge 8)$

8. $(n+1)\cos\frac{\pi}{n+1}-n\cos\frac{\pi}{n}\ge 1$ với $\forall n\ge 1$

9. $\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}....\frac{2n+1}{2n+2}<\frac{1}{\sqrt{3n+4}}$

10. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2^n-1}<n ;(\forall n\in\mathbb{N}^*, n\ge 2)$.

Bài 8 Cho tổng: $S_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

1. Tính $S_1; S_2; S_3; S_4$

2. Dự đoán công thức tính S_n và chứng minh bằng phương pháp qui nạp.

Bài 9 Cho hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \ge 2$ là số nguyên . Chứng minh rằng nếu $\frac{f(x)+f(x)}{2} \ge f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ $\forall x, y \ge 0$ (1) thì ta có

$\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n} \ge f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)$ $\forall x_i \ge 0$, $i = \overline{1,n}$ (2).

Vấn đề 2. Ứng dụng phương pháp quy nạp trong số học và trong hình học

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho n là số tự nhiên dương. Chứng minh rằng: $a_n = 16^n - 15n - 1 \,\vdots\, 225$

Ví dụ 2. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \ge 1$ thì $A(n) = 7^n + 3n - 1$ luôn chia hết cho 9

Ví dụ 3. Cho n là số tự nhiên dương. Chứng minh rằng: $B_n = (n+1)(n+2)(n+3)....(3n) \,\vdots\, 3^n$

Ví dụ 4. Trong mặt mặt phẳng cho n điểm rời nhau (n > 2) tất cả không nằm trên một đường thẳng. Chứng minh rằng tất cả các đường thẳng nối hai điểm trong các điểm đã cho tạo ra số đường thẳng khác nhau không nhỏ hơn n.

Ví dụ 5. Chứng minh rằng tổng các trong một n – giác lồi $(n \ge 3)$ bằng $(n-2)180^0$.

1I. BÀI TẬP TỰ LUẬN TỰ LUYỆN

Bài 1 Cho n là số nguyên dương.Chứng minh rằng:

1. $n(2n^2 - 3n + 1)$ chia hết cho 6.

2. $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ chia hết cho 133

3. $n^7 - n$ chia hết cho 7

4. $13^n - 1$ chia hết cho 6

5. $n^5 - n$ chia hết cho 5 với mọi $n \ge 1$

6. $16^n - 15n - 1$ chia hết cho 225 với mọi $n \ge 1$

7. $4.3^{2n+1} + 32n - 36$ chia hết cho 64 với mọi $n \ge 1$.

Bài 2

1. Chứng minh rằng với $\forall n \ge 2$, ta luôn có $a_n = (n+1)(n+2)...(n+n)$ chia hết cho 2^n.

2. Cho a, b là nghiệm của phương trình $x^2 - 27x + 14 = 0$

Đặt $S(n) = a^n + b^n$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì $S(n)$ là một số nguyên không chia hết cho 715.

3. Cho hàm số $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ thỏa $f(1) = 1, f(2) = 2$ và $f(n+2) = 2f(n+1) + f(n)$.

Chứng minh rằng: $f^2(n+1) - f(n+2)f(n) = (-1)^n$

4. Cho p_n là số nguyên tố thứ n. Chứng minh rằng: $2^{2^n} > p_n$.

5. Chứng minh rằng mọi số tự nhiên không vượt qua $n!$ đều có thể biểu diễn thành tổng của không quá n ước số đôi một khác nhau của $n!$.

Bài 3 Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình : $x^2 - 6x + 1 = 0$. Đặt $a_n = x_1^n + x_2^n$. Chứng minh rằng :

1. $a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2}$ $\forall n \ge 2$.

2. a_n là một số nguyên và a_n không chia hết cho 5 với mọi $n \ge 1$.

Bài 4

1. Trong không gian cho n mặt phẳng phân biệt ($n \ge 1$), trong đó ba mặt phẳng luôn cắt nhau và không có bốn mặt phẳng nào có điểm chung. Hỏi n mặt phẳng trên chia không gian thành bao nhiêu miền?

2. Cho n đường thẳng nằm trong mặt phẳng trong đó hai đường thẳng bất kì luôn cắt nhau và không có ba đường thẳng nào đồng quy. Chứng minh rằng n đường thẳng này chia mặt phẳng thành $\frac{n^2+n+2}{2}$ miền.

Bài 5

1. Cho a,b,c,d,m là các số tự nhiên sao cho $a+d$, $(b-1)c$, $ab-a+c$ chia hết cho m. Chứng minh rằng $x_n = a.b^n + cn + d$ chia hết cho m với mọi số tự nhiên n.

2. Chứng minh rằng từ $n+1$ số bất kì trong $2n$ số tự nhiên đầu tiên luôn tìm được hai số là bội của nhau.

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN

Câu 1. Dùng quy nạp chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \ge p$ (p là một số tự nhiên). Ở bước 1 (bước cơ sở) của chứng minh quy nạp, bắt đầu với n bằng:

A. $n=1$. **B.** $n=p$. **C.** $n>p$. **D.** $n \ge p$.

Câu 2. Dùng quy nạp chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \ge p$ (p là một số tự nhiên). Ở bước 2 ta giả thiết mệnh đề $A(n)$ đúng với $n=k$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $k>p$. **B.** $k \ge p$. **C.** $k=p$. **D.** $k<p$.

Câu 3. Khi sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \ge p$ (p là một số tự nhiên), ta tiến hành hai bước:

- Bước 1, kiểm tra mệnh đề $A(n)$ đúng với $n=p$.
- Bước 2, giả thiết mệnh đề $A(n)$ đúng với số tự nhiên bất kỳ $n=k \ge p$ và phải chứng minh rằng nó cũng đúng với $n=k+1$.

Trogn hai bước trên:

A. Chỉ có bước 1 đúng. **B.** Chỉ có bước 2 đúng.

C. Cả hai bước đều đúng. **D.** Cả hai bước đều sai.

Câu 4. Một học sinh chứng minh mệnh đề "8^n+1 chia hết cho 7, $\forall n \in \mathbb{N}^*$" $(*)$ như sau:

- Giả sử $(*)$ đúng với $n=k$, tức là 8^k+1 chia hết cho 7.
- Ta có: $8^{k+1}+1 = 8(8^k+1)-7$, kết hợp với giả thiết 8^k+1 chia hết cho 7 nên suy ra được $8^{k+1}+1$ chia hết cho 7. Vậy đẳng thức $(*)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Học sinh trên chứng minh đúng.

B. Học sinh chứng minh sai vì không có giả thiết qui nạp.

C. Học sinh chứng minh sai vì không dùng giả thiết qui nạp.

D. Học sinh không kiểm tra bước 1 (bước cơ sở) của phương pháp qui nạp.

Câu 5. Cho $S_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n.(n+1)}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_3 = \frac{1}{12}$. **B.** $S_2 = \frac{1}{6}$. **C.** $S_2 = \frac{2}{3}$. **D.** $S_3 = \frac{1}{4}$.

Câu 6. Cho $S_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n.(n+1)}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n = \frac{n-1}{n}$. **B.** $S_n = \frac{n}{n+1}$.

C. $S_n = \frac{n+1}{n+2}$. **D.** $S_n = \frac{n+2}{n+3}$.

Câu 7. Cho $S_n = \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n = \frac{n-1}{2n-1}$. **B.** $S_n = \frac{n}{2n+1}$.

C. $S_n = \frac{n}{3n-2}$. **D.** $S_n = \frac{n+2}{2n+5}$.

Câu 8. Cho $P_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ với $n \ge 2$ và $n \in \mathbb{N}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P = \frac{n+1}{n+2}$. **B.** $P = \frac{n-1}{2n}$.

C. $P = \frac{n+1}{n}$. **D.** $P = \frac{n+1}{2n}$.

Câu 9. Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, hệ thức nào sau đây là sai?

A. $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$

B. $1+3+5+...+(2n-1) = n^2$.

C. $1^2+2^2+...+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

D. $2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Câu 10. Xét hai mệnh đề sau:

I) Với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, số n^3+3n^2+5n chia hết cho 3.

II) Với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, ta có $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$.

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ I. **B.** Chỉ II. **C.** Không có. **D.** Cả I và II.

1.PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

Nội dung phương pháp quy nạp toán học

Cho n_0 *là một số nguyên dương và* $P(n)$ *là một mệnh đề có nghĩa với mọi số tự nhiên* $n \ge n_0$. *Nếu*

(1) $P(n_0)$ *là đúng và*

(2) Nếu $P(k)$ *đúng, thì* $P(k+1)$ *cũng đúng với mọi số tự nhiên* $k \ge n_0$ *;*

thì mệnh đề P(n) đúng với mọi số tự nhiên $n \ge n_0$.

Khi ta bắt gặp bài toán:

Chứng minh mệnh đề $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \ge n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ ta có thể sử dụng phương pháp quy nạp như sau

Bước 1: Kiểm tra $P(n_0)$ có đúng hay không. Nếu bước này đúng thì ta chuyển qua bước hai

Bước 2: Với $k \ge n_0$, giả sử $P(k)$ đúng ta cần chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng.

Kết luận: $P(n)$ đúng với $\forall n \ge n_0$.

Lưu ý: Bước 2 gọi là bước quy nạp, mệnh đề $P(k)$ đúng gọi là giả thiết quy nạp.

Vấn đề 1. Dùng quy nạp để chứng minh đẳng thức. Bất đẳng thức

Phương pháp .

Phương pháp: Giả sử cần chứng minh đẳng thức $P(n) = Q(n)$ (hoặc $P(n) > Q(n)$) đúng với $\forall n \ge n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tính $P(n_0), Q(n_0)$ rồi chứng minh $P(n_0) = Q(n_0)$

Bước 2: Giả sử $P(k) = Q(k);\ k \in \mathbb{N}, k \ge n_0$, ta cần chứng minh

$P(k+1) = Q(k+1)$.

Các ví dụ

Ví dụ 1.

Chứng mình với mọi số tự nhiên $n \ge 1$ ta luôn có: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Lời giải.

Đặt $P(n) = 1 + 2 + 3 + ... + n$: tổng n số tự nhiên đầu tiên : $Q(n) = \frac{n(n+1)}{2}$

Ta cần chứng minh $P(n) = Q(n)\ \ \forall n \in \mathbb{N}, n \ge 1$.

Bước 1: Với $n = 1$ ta có $P(1) = 1,\ Q(1) = \frac{1(1+1)}{2} = 1$

$\Rightarrow P(1) = Q(1) \Rightarrow (1)$ đúng với $n = 1$.

Bước 2: Giả sử $P(k) = Q(k)$ với $k \in \mathbb{N}, k \ge 1$ tức là:

$$1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2} \quad (1)$$

Ta cần chứng minh $P(k+1) = Q(k+1)$, tức là:

$$1 + 2 + 3 + ... + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad (2)$$

Thật vậy: $VT(2) = (1 + 2 + 3 + ... + k) + (k+1)$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \qquad \text{(Do đẳng thức (1))}$$

$$= (k+1)(\frac{k}{2} + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = VP(2)$$

Vậy đẳng thức cho đúng với mọi $n \ge 1$.

Ví dụ 2.

Chứng minh với mọi số tự nhiên $n \ge 1$ ta luôn có: $1 + 3 + 5 + ... + 2n - 1 = n^2$

Lời giải.

- Với $n = 1$ ta có $VT = 1,\ VP = 1^2 = 1$

Suy ra $VT = VP \Rightarrow$ đẳng thức cho đúng với $n = 1$.

- Giả sử đẳng thức cho đúng với $n = k$ với $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ tức là:

$$1 + 3 + 5 + ... + 2k - 1 = k^2 \quad (1)$$

Ta cần chứng minh đẳng thức cho đúng với $n = k + 1$, tức là:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2k + 1) = \left(k + 1\right)^2 \quad (2)$$

Thật vậy: $VT(2) = (1 + 3 + 5 + ... + 2k - 1) + (2k + 1)$

$= k^2 + (2k + 1)$ (Do đẳng thức (1))

$= (k + 1)^2 = VP(1.2)$

Vậy đẳng thức cho đúng với mọi $n \geq 1$.

Ví dụ 3.

Chứng minh rằng với $\forall n \geq 1$, ta có bất đẳng thức: $\dfrac{1.3.5...\left(2n - 1\right)}{2.4.6.2n} < \dfrac{1}{\sqrt{2n + 1}}$

Lời giải.

* Với $n = 1$ ta có đẳng thức cho trở thành : $\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 2 > \sqrt{3}$ đúng.

$\Rightarrow$ đẳng thức cho đúng với $n = 1$.

* Giả sử đẳng thức cho đúng với $n = k \geq 1$, tức là :

$$\frac{1.3.5...\left(2k - 1\right)}{2.4.6...2k} < \frac{1}{\sqrt{2k + 1}} \quad (1)$$

Ta phải chứng minh đẳng thức cho đúng với $n = k + 1$, tức là :

$$\frac{1.3.5...\left(2k - 1\right)\left(2k + 1\right)}{2.4.6....2k\left(2k + 2\right)} < \frac{1}{\sqrt{2k + 3}} \quad (2)$$

Thật vậy, ta có :

$$VT(2) = \frac{1.3.5...(2k - 1)}{2.4.6...2k}.\frac{2k + 1}{2k + 2} < \frac{1}{\sqrt{2k + 1}}\frac{2k + 1}{2k + 2} = \frac{\sqrt{2k + 1}}{2k + 2}$$

Ta chứng minh: $\dfrac{\sqrt{2k + 1}}{2k + 2} < \dfrac{1}{\sqrt{2k + 3}} \Leftrightarrow (2k + 1)(2k + 3) < (2k + 2)^2$

$\Leftrightarrow 3 > 1$ (luôn đúng)

Vậy đẳng thức cho đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng với $\forall n \geq 1, \forall x > 0$ ta có bất đẳng thức: $\dfrac{x^n(x^{n+1} + 1)}{x^n + 1} \leq \left(\dfrac{x + 1}{2}\right)^{2n+1}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải.

- Với $n = 1$ ta cần chứng minh: $\dfrac{x(x^2 + 1)}{x + 1} \leq \left(\dfrac{x + 1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow 8x(x^2 + 1) \leq (x + 1)^4$

Tức là: $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^4 \geq 0$ (đúng)

Đẳng thức xảy ra khi $x = 1$.

- Giả sử $\dfrac{x^k(x^{k+1} + 1)}{x^k + 1} \leq \left(\dfrac{x + 1}{2}\right)^{2k+1}$, ta chứng minh

$$\frac{x^{k+1}(x^{k+2} + 1)}{x^{k+1} + 1} \leq \left(\frac{x + 1}{2}\right)^{2k+3} \quad (*)$$

Thật vậy, ta có:

$$\left(\frac{x + 1}{2}\right)^{2k+3} = \left(\frac{x + 1}{2}\right)^2\left(\frac{x + 1}{2}\right)^{2k+1} \geq \left(\frac{x + 1}{2}\right)^2\frac{x^k(x^{k+1} + 1)}{x^k + 1}$$

Nên để chứng minh (*) ta chỉ cần chứng minh

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^2\frac{x^k(x^{k+1}+1)}{x^k+1}\ge\frac{x^{k+1}(x^{k+2}+1)}{x^{k+1}+1}$$

Hay $\left(\frac{x+1}{2}\right)^2(x^{k+1}+1)^2\ge x(x^{k+2}+1)(x^k+1)$ (**)

Khai triển (**) , biến đổi và rút gọn ta thu được

$x^{2k+2}(x-1)^2-2x^{k+1}(x-1)^2+(x-1)^2\ge0\Leftrightarrow(x-1)^2(x^{k+1}-1)^2\ge0$ BĐT này hiển nhiên đúng. Đẳng thức có $\Leftrightarrow x=1$.

Vậy bài toán được chứng minh.

Chú ý: Trong một số trường hợp để chứng minh mệnh đề $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên n ta có thể chứng minh theo cách sau

Bước 1: Ta chứng minh $P(n)$ đúng với $n=1$ và $n=2^k$

Bước 2: Giả sử $P(n)$ đúng với $n=k+1$, ta chứng minh $P(n)$ đúng với $n=k$.

Cách chứng minh trên được gọi là quy nạp theo kiểu Cauchy (Cô si).

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n\ge1$, ta luôn có

1. $1^2+2^2+...+(n-1)^2+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2. $\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+...+\frac{n}{3^n}=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4.3^n}$

Bài 2 Chứng minh các đẳng thức sau

1. $1.2+2.3+...+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ với $\forall n\ge1$

2. $\frac{1}{1.5}+\frac{1}{5.9}+\frac{1}{9.13}+...+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$

3. $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

4. $\left(1-\frac{4}{1}\right)\left(1-\frac{4}{9}\right)\left(1-\frac{4}{25}\right)...\left(1-\frac{4}{(2n-1)^2}\right)=\frac{1+2n}{1-2n}$

5. $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

6. $1.2^2+2.3^2+3.4^2+...+(n-1).n^2=\frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$, $\forall n\ge2$

7. $2^2+4^2+...+(2n)^2=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$

8. $1.2.3+2.3.4+...+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

Với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

9. $1.2^2+2.3^2+3.4^2+...+(n-1).n^2=\frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$

với $\forall n\ge2$.

10. $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

Với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

Bài 3

1. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n\ge1$ ta có:

$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ (n dấu căn)

2. Chứng minh các đẳng thức $\sin x+\sin 2x+...\sin nx=\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ với $x\neq k2\pi$ với $n\geq 1$.

Bài 4 Chứng minh rằng với mọi $n\geq 1$ ta có bất đẳng thức:

$\left|\sin nx\right|\leq n\left|\sin x\right| \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Bài 5

1. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n\geq 1$, ta có : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$

2. $3^n>3n+1$ với mọi số tự nhiên $n\geq 2$;

3. $\frac{2.4.6.2n}{1.3.5...(2n-1)}>\sqrt{2n+1}$ với mọi số tự nhiên $n\geq 1$;

Bài 6 Cho hàm số f xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$ và thoả mãn điều kiện : $f(x+y)\geq f(x).f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ (*). Chứng minh rằng với mọi số thực x và mọi số tự nhiên n ta có : $f(x)\geq\left[f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right]^{2n}$

Bài 7 Chứng minh các bất đẳng thức sau

1. $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n} \quad \forall n\geq 2$

2. $\sqrt{n}<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}....+\frac{1}{\sqrt{n}}\leq 2\sqrt{n}$

3. $\tan n\alpha>n\tan\alpha$ với $0<\alpha<\frac{\pi}{4(n-1)}$

4. $2^n>2n+1 \quad \forall n\geq 3$

5. $2^{n+2}>2n+5,\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)$

6. $3^{n-1}>n(n+2);\ (\forall n\in\mathbb{N}^*, n\geq 4)$

7. $2^{n-3}>3n-1;\ (\forall n\in\mathbb{N}^*, n\geq 8)$

8. $(n+1)\cos\frac{\pi}{n+1}-n\cos\frac{\pi}{n}\geq 1$ với $\forall n\geq 1$

9. $\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}....\frac{2n+1}{2n+2}<\frac{1}{\sqrt{3n+4}}$

10. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2^n-1}<n\ ;(\forall n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2)$.

Bài 8 Cho tổng: $S_n=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

1. Tính $S_1;S_2;S_3;S_4$

2. Dự đoán công thức tính S_n và chứng minh bằng phương pháp qui nạp.

Bài 9 Cho hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $n\geq 2$ là số nguyên . Chứng minh rằng nếu $\frac{f(x)+f(x)}{2}\geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)\quad \forall x,y\geq 0$ (1) thì ta có $\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n}\geq f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)\quad \forall x_i\geq 0,\ i=\overline{1,n}$ (2).

ĐÁP ÁN

Bài 1

1. ***Bước 1:*** Với $n=1$ ta có:

$$VT=1^2=1,\ VP=\frac{1(1+1)(2.1+1)}{6}=1\Rightarrow VT=VP$$

$\Rightarrow$ đẳng thức cho đúng với $n=1$.

Bước 2: Giả sử đẳng thức cho đúng với $n=k\ge 1$, tức là:

$$1^2+2^2+...+(k-1)^2+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}\quad (1)$$

Ta sẽ chứng minh đẳng thức cho đúng với $n=k+1$, tức là cần chứng minh:

$$1^2+2^2+...+(k-1)^2+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+1)(2k+3)}{6}\quad (2).$$

Thật vậy:

$$VT(2)=\left[1^2+2^2+...+k^2\right]+(k+1)^2\overset{\text{do }(1)}{=}\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

$$=(k+1)\left[\frac{2k^2+k}{6}+k+1\right]=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}=VP(2)$$

$\Rightarrow (2)$ đúng $\Rightarrow$ đẳng thức cho đúng với mọi $n\ge 1$.

2. * Với $n=1$ ta có $VT=1=VP\Rightarrow$ đẳng thức cho đúng với $n=1$

* Giả sử đẳng thức cho đúng với $n=k\ge 1$, tức là:

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+...+\frac{k}{3^k}=\frac{3}{4}-\frac{2k+3}{4.3^k}\quad (1)$$

Ta sẽ chứng minh đẳng thức cho đúng với $n=k+1$, tức là cần chứng minh

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+...+\frac{k}{3^k}+\frac{k+1}{3^{k+1}}=\frac{3}{4}-\frac{2k+5}{4.3^{k+1}}\quad (2).$$

Thật vậy:

$$VT(2)=\frac{3}{4}-\frac{2k+3}{4.3^k}+\frac{k+1}{3^{k+1}}=\frac{3}{4}-\frac{2k+5}{4.3^{k+1}}=VP(2)$$

$\Rightarrow (2)$ đúng $\Rightarrow$ đẳng thức cho đúng.

Bài 2

1. $1.2+2.3+...+k(k+1)+(k+1)(k+2)=$

$$=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.$$

2. $\frac{1}{1.5}+\frac{1}{5.9}+\frac{1}{9.13}+...+\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}+\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}=$

$$=\frac{k}{4k+1}+\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}=\frac{k+1}{4k+5}$$

3. $\left[\frac{k(k+1)}{3}\right]^2+(k+1)^3=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{3}\right]^2.$

4. $\left(1-\frac{4}{(2k+1)^2}\right)\frac{1+2k}{1-2k}=-\frac{(2k+3)(2k-1)(1+2k)}{(2k+1)^2(1-2k)}=\frac{2k+3}{-(2k+1)}$

5,6,7. Bạn đọc tự làm

8. $\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}+(k+1)(k+2)(k+3)=$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}.$$

9. $\dfrac{k(k^2-1)(3k+2)}{12}+k(k+1)^2=k(k+1)\left[\dfrac{(k-1)(3k+2)}{12}+1\right]$

$$=\frac{k(k+1)(3k^2-k-10)}{12}=\frac{(k+1)k(k+2)(3k+5)}{12}.$$

10. $\dfrac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}+\dfrac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}=$

$=\dfrac{k(k+3)^2+4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}=\dfrac{(k+1)^2(k+4)}{4(k+1)(k+2)(k+3)}=\dfrac{(k+1)(k+4)}{4(k+2)(k+3)}.$

Bài 3

1.

* Với $n=1\Rightarrow VT=\sqrt{2},\ VP=2\cos\dfrac{\pi}{4}=\sqrt{2}$

$\Rightarrow VT=VP\Rightarrow$ đẳng thức cho đúng với $n=1$.

* Giả sử đẳng thức cho đúng với $n=k$, tức là:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}=2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}\quad \text{(k dấu căn)}\ (1)$$

Ta sẽ chứng minh đẳng thức cho đúng với $n=k+1$, tức là:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}=2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}\quad (k+1\ \text{dấu căn})\ (2).$$

Thật vậy: $VT(2)=\sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{\text{k dau can}}}=\sqrt{2+2\cos\dfrac{\pi}{2^{k+1}}}$

$$=\sqrt{2(1+\cos\frac{\pi}{2^{k+1}})}=\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}}}=2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}=VP(2)$$

(Ở trên ta đã sử dụng công thức $1+\cos a=2\cos^2\dfrac{a}{2}$).

$\Rightarrow(2)$ đúng $\Rightarrow$ đẳng thức cho đúng.

2. • Với $n=1$ ta có $VT=\sin x,\ VP=\dfrac{\sin\frac{x}{2}\sin x}{\sin\frac{x}{2}}=\sin x$ nên đẳng thức cho đúng với $n=1$

• Giả sử đẳng thức cho đúng với $n=k\ge1$, tức là:

$$\sin x+\sin 2x+...\sin kx=\frac{\sin\frac{kx}{2}\sin\frac{(k+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\quad (1)$$

Ta chứng minh (4) đúng với $n=k+1$, tức là

$$\sin x+\sin 2x+...\sin(k+1)x=\frac{\sin\frac{(k+1)x}{2}\sin\frac{(k+2)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\quad (2)$$

Thật vậy: $VT(2)=\dfrac{\sin\frac{kx}{2}\sin\frac{(k+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}+\sin(k+1)x$

$$=\sin\frac{(k+1)x}{2}\left[\frac{\sin\frac{kx}{2}+2\cos\frac{(k+1)x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right]$$

$$=\frac{\sin\frac{(k+1)x}{2}\sin\frac{(k+2)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\text{VP}(2)$$

Nên (2) đúng. Suy ra đẳng thức cho đúng với mọi $n\ge 1$.

Bài 4 * Với $n=1$ ta có: $\text{VT}=|\sin 1.\alpha|=1.|\sin\alpha|=\text{VP}$ nên đẳng thức cho đúng.

* Giả sử đẳng thức cho đúng với $n=k\ge 1$, tức là : $|\sin kx|\le k|\sin x|$ (1)

Ta phải chứng minh đẳng thức cho đúng với $n=k+1$,tức là :

$$|\sin(k+1)\alpha|\le(k+1)|\sin\alpha| \quad (2)$$

Thật vậy:

$$|\sin(k+1)\alpha|=|\sin k\alpha\cos\alpha+\cos k\alpha\sin\alpha|$$
$$\le|\sin k\alpha|.|\cos\alpha|+|\cos k\alpha|.|\sin\alpha|\le|\sin k\alpha|+|\sin\alpha|$$
$$\le k|\sin\alpha|+|\sin\alpha|=(k+1).|\sin\alpha|$$

Vậy đẳng thức cho đúng với $n=k+1$, nên đẳng thức cho cũng đúng với mọi số nguyên dương n.

Bài 5

1. Ta chứng minh $\left(1+\frac{1}{n}\right)^k<\frac{n^2}{k^2}+\frac{n}{k}+1 \quad ,1\le k\le n$ (1) bằng phương pháp quy nạp theo k. Sau đó cho $k=n$ ta có (7).

* Với $k=1\Rightarrow \text{VT}(1)=1+\frac{1}{n}<\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}+1=\text{VP}(1)$

$\Rightarrow$ (1) đúng với $k=1$.

* Giải sử (1) đúng với $k=p,\ 1\le p\le n$, tức là:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^p<\frac{p^2}{n^2}+\frac{p}{n}+1 \quad (2).$$

Ta chứng minh (1) đúng với $k=p+1$, tức là

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+1}<\frac{(p+1)^2}{n^2}+\frac{p+1}{n}+1 \quad (3).$$

Thật vậy: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^p.\left(1+\frac{1}{n}\right)<\left(\frac{p^2}{n^2}+\frac{p}{n}+1\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$$=\frac{p^2}{n^3}+\frac{p^2+p}{n^2}+\frac{p+1}{n}+1\le\frac{p}{n^2}+\frac{p^2+p}{n^2}+\frac{p+1}{n}+1$$

$$<\frac{p^2+2p+1}{n^2}+\frac{p+1}{n}+1=\frac{(p+1)^2}{n^2}+\frac{p+1}{n}+1 \Rightarrow (3) \text{ đúng} \Rightarrow \text{ đpcm.}$$

Cách khác: Khi $n=1\Rightarrow 2<3$ (đúng) dễ thấy khi $n>1\Rightarrow\frac{1}{n}$ tiến dần về $0\Rightarrow\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tiến gần về 1.Vậy $\forall n\ge 1$ ta luôn có

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$$

2. Với $n=2$ ta có: $\text{VT}=3^2=9>\text{VP}=3.2+1=7$ nên đẳng thức cho đúng với $n=1$

- Giả sử đẳng thức cho đúng với $n=k\ge 2$, tức là: $3^k>3k+1$ (1)

Ta chứng minh đẳng thức cho đúng với $n=k+1$, tức là :

$$3^{k+1} \ge 3(k+1)+1 = 3k+4 \quad (2)$$

Thật vậy: $3^{k+1} = 3.3^k > 3(3k+1) = 3k+4+(6k-1) > 3k+4$ nên (2) đúng.
Vậy bài tóan được chứng minh.

3. Với $n=1$ ta có: $VT = \frac{2}{1} = 2,\ VP = \sqrt{3} \Rightarrow$ đẳng thức cho đúng với $n=1$

- Giả sử đẳng thức cho đúng với $n = k \ge 1$, tức là:

$$\frac{2.4.6.2k}{1.3.5...(2k-1)} > \sqrt{2k+1} \ (1)$$

Ta chứng minh đẳng thức cho đúng với $n = k+1$, tức là:

$$\frac{2.4.6.2k(2k+2)}{1.3.5...(2k-1)(2k+1)} > \sqrt{2k+3} \quad (2)$$

Thật vậy: $\frac{2.4.6.2k(2k+2)}{1.3.5...(2k-1)(2k+1)} > \sqrt{2k+1}.\frac{2k+2}{2k+1} = \frac{2k+2}{\sqrt{2k+1}}$

Nên ta chứng minh $\frac{2k+2}{\sqrt{2k+1}} > \sqrt{2k+3} \Leftrightarrow (2k+2)^2 > (2k+1)(2k+3)$

$\Leftrightarrow 4 > 3$ hiển nhiên đúng.
Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 6

1. Trong BĐT $f(x+y) \ge f(x).f(y)$ thay x và y bằng $\frac{x}{2}$, ta được:

$$f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) \ge f\left(\frac{x}{2}\right).f\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow f(x) \ge \left[f(\frac{x}{2})\right]^2$$

Vậy bất đẳng thức đã cho đúng với $n=1$.
Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k \ge 1$. Ta có

$$f(x) \ge \left[f\left(\frac{x}{2^k}\right)\right]^{2k} \qquad (1)$$

Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k+1$, tức là :

$$f(x) \ge \left[f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right]^{2k+1} \quad (2)$$

Thật vậy ta có : $f\left(\frac{x}{2^k}\right) = f\left(\frac{x}{2^{k+1}} + \frac{x}{2^{k+1}}\right) \ge \left[f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right]^2$

$$\Rightarrow \left[f\left(\frac{x}{2^k}\right)\right]^{2^k} \ge \left[\left[f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right]^2\right]^{2^k}$$

$$\Rightarrow \left[f\left(\frac{x}{2^k}\right)\right]^{2^k} \ge \left[f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right]^{2^{k+1}}$$

Do tính chất bắc cầu ta có được : $f(x) \ge \left[f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right]^{2k+1}$

Bất đẳng thức đúng với $n = k+1$ nên cũng đúng với mọi số tự nhiên n.

Bài 7

1. $2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1} \Leftrightarrow \frac{1}{k+1} < \frac{1}{k}$ (hiển nhiên đúng)

2. $\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}\Leftrightarrow\sqrt{k(k+1)}>k$ (hiển nhiên)

$2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}\Leftrightarrow 2\sqrt{k(k+1)}<2k+1$

$\Leftrightarrow 4k(k+1)<(2k+1)^2=4k(k+1)+1$ (hiển nhiên).

3. $\tan(n+1)\alpha=\frac{\tan n\alpha+\tan\alpha}{1-\tan n\alpha.\tan\alpha}>(n+1)\tan\alpha$

$\Leftrightarrow \tan n\alpha+\tan\alpha>(n+1)\tan\alpha-(n+1)\tan^2\alpha.\tan n\alpha$

$\Leftrightarrow \tan n\alpha\left[1+(n+1)\tan^2\alpha\right]>n\tan\alpha$ (đúng)

4. $2^{k+1}>2(2k+1)=2k+3+2k-1>2k+3$.

5. $2^{k+3}=2.2^{k+2}>2(2k+5)=2(k+1)+5+2k+7>2(k+1)+5$

6. $3^k=3.3^{k-1}>3k(k+2)=(k+1)(k+2)+2k^2+3k-2$ $>(k+1)(k+2)$.

7. $2^{k-2}=2.2^{k-3}>2(3k-1)=3k+2+3k-4>3k+2$

8. • Với $n=1$ thì bđt hiển nhiên đúng

• Giả sử $k\cos\frac{\pi}{k}-(k-1)\cos\frac{\pi}{k-1}\ge 1$. Ta cần chứng minh

$(k+1)\cos\frac{\pi}{k+1}-k\cos\frac{\pi}{k}\ge 1\Leftrightarrow k\left(\cos\frac{\pi}{k+1}-\cos\frac{\pi}{k}\right)\ge 2\sin^2\frac{\pi}{2(k+1)}$

$\Leftrightarrow k\sin\frac{(2k+1)\pi}{2k(k+1)}\sin\frac{\pi}{2k(k+1)}\ge\sin^2\frac{\pi}{2(k+1)}$ (1)

Ta có: $\frac{\pi}{2}>\frac{(2k+1)\pi}{2k(k+1)}>\frac{\pi}{2(k+1)}>0\Rightarrow\sin\frac{(2k+1)\pi}{2k(k+1)}>\sin\frac{\pi}{2(k+1)}$

Mặt khác: $|\sin nx|\le n|\sin x|\Rightarrow k\sin\frac{\pi}{2k(k+1)}\ge\sin\frac{\pi}{2(k+1)}$

Từ đó ta có được (1) luôn đúng.
Vậy bài toán được chứng minh.

9. $\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}....\frac{2k+1}{2k+2}.\frac{2k+3}{2k+4}<\frac{1}{\sqrt{3k+4}}.\frac{2k+3}{2k+4}$

Và $\frac{1}{\sqrt{3k+4}}.\frac{2k+3}{2k+4}<\frac{1}{\sqrt{3k+7}}$

$\Leftrightarrow(3k+7)(2k+3)^2<(3k+4)(2k+4)^2\Leftrightarrow k+1>0$ (đúng).

10. $k+\frac{1}{2^{k+1}-1}<k+1\Leftrightarrow\frac{1}{2^{k+1}-1}<1$ (đúng).

Bài 8

1. Ta có $S_1=\frac{1}{3},S_2=\frac{2}{5};S_3=\frac{3}{7},S_4=\frac{4}{9}$

2. Dự đoán công thức $S_n=\frac{n}{2n+1}$.

Bài 9 • Ta chứng minh (2) đúng với $n=2^k$, $k\ge 1$
* Với $k=1$ thì (8.2) đúng (do (1))
* Giả sử (2) đúng với $n=2^k$, ta chứng minh (2) đúng với $n=2^{k+1}$

Thật vậy: $f(x_1)+...f(x_{2^k})\ge 2^k f\left(\frac{x_1+...+x_{2^k}}{2^k}\right)$

$$f(x_{2^k+1})+...f(x_{2^{k+1}})\ge 2^k f\left(\frac{x_{2^k+1}+...+x_{2^{k+1}}}{2^k}\right)$$

Do đó: $f(x_1)+...f(x_{2^{k+1}})\ge 2^k f\left(\frac{x_1+...+x_{2^k}}{2^k}\right)+2^k f\left(\frac{x_{2^k+1}+...+x_{2^{k+1}}}{2^k}\right)$

$$\ge 2^{k+1} f\left(\frac{x_1+...+x_{2^k}+x_{2^k+1}+...+x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right).$$

Do vậy (2) đúng với mọi $n=2^k$.

- Giả sử (2) đúng với mọi $n=k+1\ge 3$, tức là

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{k+1})}{k+1}\ge f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_{k+1}}{k+1}\right) \quad (3)$$

Ta chứng minh (8.2) đúng với $n=k$, tức là

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_k)}{k}\ge f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_k}{k}\right) \quad (4)$$

Thật vậy: đặt $x_{k+1}=\frac{x_1+x_2+...+x_k}{k}=\frac{x}{k}$, áp dụng (3) ta có

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_k)+f\left(\frac{x}{k}\right)}{k+1}\ge f\left(\frac{x_1+x_2+...+\frac{x}{k}}{k+1}\right)$$

Hay $\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_k)}{k}\ge f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_k}{k}\right)$.

Vậy bài toán được chứng minh.

Chú ý: Chứng minh tương tự ta cũng có bài toán sau

Nếu $\frac{f(x)+f(y)}{2}\ge f(\sqrt{xy})\quad \forall x,y\ge 0$ (a) thì ta có

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n}\ge f\left(\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}\right)\ \text{ với } \forall x_i\ge 0,\ i=\overline{1,n} \text{ (b).}$$

Vấn đề 2. Ứng dụng phương pháp quy nạp trong số học và trong hình học

Các ví dụ

Ví dụ 1.

Cho n là số tự nhiên dương. Chứng minh rằng: $a_n=16^n-15n-1\,\vdots\,225$

Lời giải.

- Với $n=1$ ta có: $a_1=0\Rightarrow a_1\,\vdots\,225$.
- Giả sử $a_k=16^k-15k-1\,\vdots\,225$, ta chứng minh

$$a_{k+1}=16^{k+1}-15(k+1)-1\,\vdots\,225$$

Thậ vậy: $a_{k+1}=16.16^k-15k-16=16^k-15k-1-15\left(16^k-1\right)$

$$=a_k-15\left(16^k-1\right)$$

Vì $16^k-1=15.\left(16^{k-1}+16^{k-2}+...+1\right)\vdots\,15$ và $a_k\,\vdots\,225$

Nên ta suy ra $a_{k+1}\,\vdots\,225$. Vậy bài toán được chứng minh

Ví dụ 2. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n\ge 1$ thì $A(n)=7^n+3n-1$ luôn chia hết cho 9

Lời giải.

* Với $n=1 \Rightarrow A(1)=7^1+3.1-1=9 \Rightarrow A(1) \vdots 9$

* Giả sử $A(k) \vdots 9\ \forall k \ge 1$, ta chứng minh $A(k+1) \vdots 9$

Thật vậy: $A(k+1)=7^{k+1}+3(k+1)-1=7.7^k+21k-7-18k+9$

$\Rightarrow A(k+1)=7A(k)-9(2k-1)$

Vì $\begin{cases} A(k) \vdots 9 \\ 9(2k-1) \vdots 9 \end{cases} \Rightarrow A(k+1) \vdots 9$

Vậy $A(n)$ chia hết cho 9 với mọi số tự nhiên $n \ge 1$.

Ví dụ 3. Cho n là số tự nhiên dương. Chứng minh rằng: $B_n=(n+1)(n+2)(n+3)....(3n) \vdots 3^n$

Lời giải.

- Với $n=1$, ta có : $B_1=2.3 \vdots 3$
- Giả sử mệnh đề đúng với n = k, tức là :

$$B_k=(k+1)(k+2)(k+3)\dots(3k) \vdots 3^k$$

Ta chứng minh : $B_{k+1}=(k+2)(k+3)(k+4)\dots[3(k\ +\ 1)] \vdots 3^{k+1}$

$B_{k+1}=3(k+1)(k+2)(k+3)\dots(3k)(3k+1)(3k+2)$

$=3B_k(3k+1)(3k+2)$

Mà $B_k \vdots 3^k$ nên suy ra $B_{k+1} \vdots 3^{k+1}$.

Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 4. Trong mặt mặt phẳng cho n điểm rời nhau (n > 2) tất cả không nằm trên một đường thẳng. Chứng minh rằng tất cả các đường thẳng nối hai điểm trong các điểm đã cho tạo ra số đường thẳng khác nhau không nhỏ hơn n.

Lời giải.

Giả sử mệnh đề đúng với $n=k \ge 3$ điểm.

Ta chứng minh nó cũng đúng cho $n=k+1$ điểm.

Ta có thể chứng minh rằng tồn tại ít nhất một đường thẳng chỉ chứa có hai điểm. Ta kí hiệu đường thẳng đi qua hai điểm A_n và A_{n+1} là A_nA_{n+1}. Nếu những điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ nằm trên một đường thẳng thì số lượng các đường thẳng sẽ đúng là $n+1$: Gồm n đường thẳng nối A_{n+1} với các điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ và đường thẳng chúng nối chung. Nếu $A_1, A_2, ..., A_n$ không nằm trên một đường thẳng thì theo giả thiết quy nạp có n đường thẳng khác nhau. Bây giờ ta thêm các đường thẳng nối A_{n+1} với các điểm $A_1, A_2, ..., A_n$. Vì đường thẳng A_nA_{n+1} không chứa một điểm nào trong $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$, nên đường thẳng này khác hoàn toàn với n đường thẳng tạo ra bởi $A_1, A_2, ..., A_n$. Như vậy số đường thẳng tạo ra cũng không nhỏ hơn $n+1$.

Ví dụ 5.

Chứng minh rằng tổng các trong một n – giác lồi $(n \ge 3)$ bằng $(n-2)180^0$.

Lời giải.

- Với $n=3$ ta có tổng ba góc trong tam giác bằng 180^0
- Giả sử công thức đúng cho tất cả k-giác, với $k<n$, ta phải chứng minh mệnh đề cũng đúng cho n-giác. Ta có thể chia n-giác bằng một đường chéo thành ra hai đa giác. Nếu số cạnh của một đa giác là k+1, thì số cạnh của đa giác kia là n – k + 1, hơn nữa cả hai số này đều nhỏ hơn n. Theo giả thiết quy nạp tổng các góc của hai đa giác này lần lượt là $(k-1)180^0$ và $(n-k-1)180^0$.

Tổng các góc của n-giác bằng tổng các góc của hai đa giác trên, nghĩa là $(k-1+n-k-1)180^0=(n-2)180^0$.

Suy ra mệnh đề đúng với mọi $n \ge 3$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Cho n là số nguyên dương.Chứng minh rằng:

1. $n(2n^2-3n+1)$ chia hết cho 6.

2. $11^{n+1}+12^{2n-1}$ chia hết cho 133

3. n^7-n chia hết cho 7

4. 13^n-1 chia hết cho 6

5. n^5-n chia hết cho 5 với mọi $n\geq 1$

6. $16^n-15n-1$ chia hết cho 225 với mọi $n\geq 1$

7. $4.3^{2n+1}+32n-36$ chia hết cho 64 với mọi $n\geq 1$.

Bài 2

1. Chứng minh rằng với $\forall n\geq 2$, ta luôn có $a_n=(n+1)(n+2)...(n+n)$ chia hết cho 2^n.

2. Cho a,b là nghiệm của phương trình $x^2-27x+14=0$

Đặt $S(n)=a^n+b^n$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì $S(n)$ là một số nguyên không chia hết cho 715.

3. Cho hàm số $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ thỏa $f(1)=1, f(2)=2$ và $f(n+2)=2f(n+1)+f(n)$.

Chứng minh rằng: $f^2(n+1)-f(n+2)f(n)=(-1)^n$

4. Cho p_n là số nguyên tố thứ n. Chứng minh rằng: $2^{2^n}>p_n$.

5. Chứng minh rằng mọi số tự nhiên không vượt qua $n!$ đều có thể biểu diễn thành tổng của không quá n ước số đôi một khác nhau của $n!$.

Bài 3 Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình : $x^2-6x+1=0$. Đặt $a_n=x_1^n+x_2^n$. Chứng minh rằng :

1. $a_n=6a_{n-1}-a_{n-2}\quad \forall n\geq 2$.

2. a_n là một số nguyên và a_n không chia hết cho 5 với mọi $n\geq 1$.

Bài 4

1. Trong không gian cho n mặt phẳng phân biệt ($n\geq 1$), trong đó ba mặt phẳng luôn cắt nhau và không có bốn mặt phẳng nào có điểm chung. Hỏi n mặt phẳng trên chia không gian thành bao nhiêu miền?

2. Cho n đường thẳng nằm trong mặt phẳng trong đó hai đường thẳng bất kì luôn cắt nhau và không có ba đường thẳng nào đồng quy. Chứng minh rằng n đường thẳng này chia mặt phẳng thành $\frac{n^2+n+2}{2}$ miền.

Bài 5

1. Cho a,b,c,d,m là các số tự nhiên sao cho $a+d$, $(b-1)c$, $ab-a+c$ chia hết cho m. Chứng minh rằng $x_n=a.b^n+cn+d$ chia hết cho m với mọi số tự nhiên n.

2. Chứng minh rằng từ $n+1$ số bất kì trong $2n$ số tự nhiên đầu tiên luôn tìm được hai số là bội của nhau.

ĐÁP ÁN

Bài 1

1. Đặt $a_n=n(2n^2-3n+1)=2n^3-3n^2+n$

Ta có: $a_{n+1}=2(n+1)^3-3(n+1)^2+n+1=a_n+6n^2$.

2. Đặt $a_n=11^{n+1}+12^{2n-1}$

Ta có: $a_{n+1}=11.11^{n+1}+12^2.12^{2n-1}=11.a_n+133.12^{2n-1}$

3. Đặt $a_n=n^7-n$

Ta có $a_{n+1}=(n+1)^7-(n+1)=a_{n+1}=a_n+\sum_{i=1}^{7}C_7^k n^{7-k}$

Mà $C_7^k=\frac{7!}{k!(7-k)!}, 1\leq k\leq 7$ luôn chia hết cho 7.

4. Đặt $a_n=13^n-1\Rightarrow a_{n+1}=13a_n+12$

5. Đặt $a_n=n^5-n$ thì ta có: $a_{k+1}-a_k=(k+1)^5-k^5-1=5k(k^3+2k^2+2k+1)$.

6. Đặt $a_n = 16^n - 15n - 1$ thì ta có: $a_{k+1} = 16^{k+1} - 15k - 16 = a_k + 15.\left(16^k - 1\right)$

7. Đặt $a_n = 4.3^{2n+1} + 32n - 36$ thì ta có: $a_{k+1} = 4.3^{2k+3} + 32(k+1) - 36 = a_k + 32(3^{2k+1} + 1)$

Bài 2

1. * Với $n = 2$, ta có : $a_2 = (2+1)(2+2) = 12 \Rightarrow a_2 \vdots 4 = 2^2$.

* Giả sử $a_k \vdots 2^k$ ta chứng minh $a_{k+1} \vdots 2^{k+1}$. Thật vậy:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= (k+1+1)(k+1+2)...(k+k+1+1) \\ &= (k+2)(k+3)...(k+k+2) \\ &= (k+2)(k+3)...(k+k)(k+k+1)(k+k+2) \\ &= \underbrace{\left[(k+1)(k+2)(k+3)...(k+k)\right]}_{a_k}.2.(k+k+1) = 2a_k.(k^2+k+1) \end{aligned}$$

Do $a_k \vdots 2^k \Rightarrow 2a_k \vdots 2^{k+1} \Rightarrow a_{k+1} \vdots 2^{k+1}$ đpcm.

2. Ta có: $S(n) = 27S(n-1) - 14S(n-2)$ rồi dùng quy nạp để chứng minh $S(n)$ chia hết cho 751.

3.

- Ta có: $f(3) = 2f(2) + f(1) = 5$, nên $f^2(2) - f(3)f(1) = 2^2 - 5.1 = (-1)^1$

Suy ra đẳng thức cho đúng với $n = 1$.

- Giả sử đẳng thức cho đúng với $n = k$, tức là:

$$f^2(k+1) - f(k+2)f(k) = (-1)^k \quad (1)$$

Ta chứng minh đẳng thức cho đúng với $n = k+1$, tức là:

$$f^2(k+2) - f(k+3)f(k+1) = (-1)^{k+1} \quad (2)$$

Ta có:

$$\begin{aligned} f^2(k+2) - f(k+3)f(k+1) &= f^2(k+2) - \left[2f(n+2) + f(n+1)\right]f(k+1) \\ &= f(k+2)\left[f(k+2) - 2f(k+1)\right] - f^2(k+1) \\ &= f(k+2)f(k) - f^2(k+1) = -(-1)^k = (-1)^{k+1} \end{aligned}$$

Vậy bài toán được chứng minh.

4. Trước hết ta có nhận xét: $p_1.p_2...p_n + 1 > p_{n+1}$

- Với $n = 1$ ta có: $2^{2^1} = 4 > p_1 = 2$

- Giả sử $2^{2^k} > p_k \ \forall k \le n$, ta cần chứng minh $2^{2^{k+1}} > p_{k+1}$

Thật vậy, ta có: $2^{2^1}.2^{2^2}...2^{2^{p_k}} + 1 > p_1.p_2...p_k + 1 > p_{k+1}$

Suy ra $2^{2^1+2^2+...+2^k} > p_{k+1} \Rightarrow 2^{2^{k+1}-1} + 1 > p_{k+1} \Rightarrow 2^{2^{k+1}} > p_{k+1}$

Vậy bài toán được chứng minh

5.

- Với $n = 1$ bài toán hiển nhiên đúng.
- Giả sử bài toán đúng với $n = k$, ta chứng minh bài toán đúng với $n = k+1$

Nếu $a = (k+1)!$ thì bài toán hiển nhiên đúng

Ta xét $a < (k+1)!$, ta có: $a = (k+1)d + r$ với $d < k!, r < k+1$

Vì $d < k!$ nên $d = d_1 + d_2 + ... + d_k$ với $d_i \ (i = \overline{1,k})$ là các ước đôi một khác nhau của $k!$

Khi đó: $a = (k+1)d_1 + (k+1)d_2 + ... + (k+1)d_k + r$

Vì $(k+1)d_i, r$ là các ước đôi một khác nhau của $(k+1)!$

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 3

1. Ta có: $a_n=(x_1+x_2)(x_1^{n-1}+x_2^{n-1})-x_1x_2(x_1^{n-2}+x_1^{n-2})$

Theo định lí Viét: $\begin{cases}x_1+x_2=6\\x_1x_2=1\end{cases}$ nên ta có:

$a_n=6(x_1^{n-1}+x_2^{n-1})-(x_1^{n-2}+x_1^{n-2})=6a_{n-1}-a_{n-2}$.

2.

* Với $n=1\Rightarrow a_1=x_1+x_2=6\Rightarrow a_1\in\mathbb{Z}$

Và a_1 không chia hết cho 5

* Giả sử $a_k\in\mathbb{Z}$ và a_k không chia hết cho 5 với mọi $k\ge 1$.

Ta chứng minh $a_{k+1}\in\mathbb{Z}$ và a_{k+1} không chia hết cho 5.

Do $a_{k+1}=6a_k-a_{k-1}$

Mà $a_k,a_{k-1}\in\mathbb{Z}\Rightarrow a_{k+1}\in\mathbb{Z}$.

Mặt khác: $a_{k+1}=5a_k+(a_k-a_{k-1})=5a_k+5a_{k-1}-a_{k-2}$

Vì a_{k-2} không chia hết cho 5 và $\begin{cases}5a_k\,\vdots\,5\\5a_{k-1}\,\vdots\,5\end{cases}$ nên suy ra a_{k+1} không chia hết cho 5.

Bài 4

1. Giả sử n mặt phẳng chia không gian thành a_n miền

Ta chứng minh được: $a_{n+1}=a_n+\dfrac{n^2+n+2}{2}$

Từ đó ta tính được: $a_n=\dfrac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}$.

2. Gọi a_n là số miền do n đường thẳng trên tạo thành.

Ta có: $a_1=2$.

Ta xét đường thẳng thứ $n+1$ (ta gọi là d), khi đó d cắt n đường thẳng đã cho tại n điểm và bị n đường thẳng chia thành $n+1$ phần đồng thời mỗi phần thuộc một miền của a_n. Mặt khác với mỗi đoạn nằm trong miền của a_n sẽ chia miền đó thành 2 miền, nên số miền có thêm là $n+1$. Do vậy, ta có: $a_{n+1}=a_n+n+1$

Từ đây ta có: $a_n=\dfrac{n^2+n+2}{2}$.

Bài 5

1.

- Với $n=0$ ta có $x_0=a+d\,\vdots\,m$
- Giả sử $x_k=a.b^k+ck+d\,\vdots\,m$ với $k\ge 0,k\in\mathbb{N}$, ta chứng minh

$x_{k+1}=a.b^{k+1}+c(k+1)+d\,\vdots\,m$. Thật vậy:

$x_{k+1}-x_k=a.b^{k+1}-a.b^k+c=b^k\left(ab-a+c\right)-c.b^k+c$

$\quad=b^k\left(ab-a+c\right)-c(b-1)\left(b^{k-1}+b^{k-2}+...+1\right)$

Mà $x_k,ab-a+c,c(b-1)\,\vdots\,m\Rightarrow x_{k+1}\,\vdots\,m$

Vậy bài toán được chứng minh.

2.

- Với $n=1$ ta thấy bài toán hiển nhiên đúng
- Giả sử bài toán đúng với $n-1$, có nghĩa là: từ n số bất kì trong $2n-2$ số tự nhiên đầu tiên luôn tìm được hai số là bội của nhau.

Ta chứng minh bài toán đúng với n, tức là: từ $n+1$ số bất kì trong $2n$ số tự nhiên đầu tiên luôn tìm được hai số là bội của nhau.

Ta chứng minh bằng phản chứng:

Giả sử tồn tại một tập con X có $n+1$ phần tử của tập $A=\{1,2,...,2n\}$ sao cho hai số bất kì trong X không là bội của nhau.

Ta sẽ chứng minh rằng có một tập con X' gồm n phần tử của tập $\{1,2,...,2n-2\}$ sao cho hai phần tử bất kì của X' không là bội của nhau

Để chứng minh điều này ta xét các trường hợp sau đây

TH 1: X không chứa $2n$ và $2n-1$

Ta bỏ đi một phần tử bất kì của tập X ta được một tập X' gồm n phần tử và là tập con của $\{1,2,...,2n-2\}$ mà hai phần tử bất kì thuộc X' không là bội của nhau.

TH 2: X chứa $2n$ mà không chứa $2n-1$

Ta bỏ đi phần tử $2n$ thì ta thu được tập X' gồm n phần tử và là tập con của $\{1,2,...,2n-2\}$ mà hai phần tử bất kì thuộc X' không là bội của nhau.

TH 3: X chứa $2n-1$ mà không chứa $2n$

Ta bỏ đi phần tử $2n-1$ thì ta thu được tập X' gồm n phần tử và là tập con của $\{1,2,...,2n-2\}$ mà hai phần tử bất kì thuộc X' không là bội của nhau.

TH 2: X chứa $2n$ và $2n-1$

Vì X không chứa hai số là bội của nhau nên X không chứa n và ước của n (Vì nếu chứa ước của n thì số đó là ước của $2n$)

Bây giờ trong X, ta bỏ đi hai phần tử $2n-1$ và $2n$ rồi bổ sung thêm n vào thì ta thu được tập X' gồm n phần tử và là tập con của $\{1,2,...,2n-2\}$ mà hai phần tử bất kì thuộc X' không là bội của nhau.

Như vậy ta luôn thu được một tập con X' gồm n phần tử của tập $\{1,2,...,2n-2\}$ mà các phần tử không là bội của nhau.

Điều này trái với giả thiết quay nạp.

Vậy bài toán được chứng minh theo nguyên lí quy nạp.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Dùng quy nạp chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ (p là một số tự nhiên). Ở bước 1 (bước cơ sở) của chứng minh quy nạp, bắt đầu với n bằng:

A. $n=1.$ **B.** $n=p.$ **C.** $n>p.$ **D.** $n \geq p.$

Lời giải. Chọn B.

Câu 2. Dùng quy nạp chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ (p là một số tự nhiên). Ở bước 2 ta giả thiết mệnh đề $A(n)$ đúng với $n=k$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $k>p.$ **B.** $k \geq p.$ **C.** $k=p.$ **D.** $k<p.$

Lời giải. Chọn B.

Câu 3. Khi sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ (p là một số tự nhiên), ta tiến hành hai bước:

- Bước 1, kiểm tra mệnh đề $A(n)$ đúng với $n=p.$
- Bước 2, giả thiết mệnh đề $A(n)$ đúng với số tự nhiên bất kỳ $n=k \geq p$ và phải chứng minh rằng nó cũng đúng với $n=k+1.$

Trogn hai bước trên:

A. Chỉ có bước 1 đúng. **B.** Chỉ có bước 2 đúng.

C. Cả hai bước đều đúng. **D.** Cả hai bước đều sai.

Lời giải. Chọn C.

Câu 4. Một học sinh chứng minh mệnh đề "8^n+1 chia hết cho $7, \forall n\in\mathbb{N}^*$" $(*)$ như sau:

• Giả sử $(*)$ đúng với $n=k$, tức là 8^k+1 chia hết cho 7.

• Ta có: $8^{k+1}+1=8\left(8^k+1\right)-7$, kết hợp với giả thiết 8^k+1 chia hết cho 7 nên suy ra được $8^{k+1}+1$ chia hết cho 7. Vậy đẳng thức $(*)$ đúng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Học sinh trên chứng minh đúng.

B. Học sinh chứng minh sai vì không có giả thiết qui nạp.

C. Học sinh chứng minh sai vì không dùng giả thiết qui nạp.

D. Học sinh không kiểm tra bước 1 (bước cơ sở) của phương pháp qui nạp.

Lời giải. Chọn D. Thiếu bước 1 là kiểm tra với $n=1$, khi đó ta có $8^1+1=9$ không chi hết cho 7.

Câu 5. Cho $S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n.(n+1)}$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_3=\frac{1}{12}$. **B.** $S_2=\frac{1}{6}$. **C.** $S_2=\frac{2}{3}$. **D.** $S_3=\frac{1}{4}$.

Lời giải. Nhìn vào đuôi của S_n là $\frac{1}{n.(n+1)}\longrightarrow$ cho $n=2$, ta được $\frac{1}{2.(2+1)}=\frac{1}{2\cdot 3}$.

Do đó với $n=2$, ta có $S_2=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{2}{3}$. **Chọn C.**

Câu 6. Cho $S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n.(n+1)}$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n=\frac{n-1}{n}$. **B.** $S_n=\frac{n}{n+1}$. **C.** $S_n=\frac{n+1}{n+2}$. **D.** $S_n=\frac{n+2}{n+3}$.

Lời giải. Cách trắc nghiệm: Ta tính được $S_1=\frac{1}{2}$, $S_2=\frac{2}{3}$, $S_3=\frac{3}{4}$. Từ đó ta thấy quy luật là từ nhỏ hơn mẫu đúng 1 đơn vị. **Chọn B.**

Cách tự luận. Ta có $S_1=\frac{1}{2}$, $S_2=\frac{2}{3}$, $S_3=\frac{3}{4}\longrightarrow$ dự đoán $S_n=\frac{n}{n+1}$.

• Với $n=1$, ta được $S_1=\frac{1}{1.2}=\frac{1}{1+1}$: đúng.

• Giả sử mệnh đề đúng khi $n=k$ $(k\geq 1)$, tức là $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$.

• Ta có $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$. Suy ra mệnh đề đúng với $n=k+1$.

Câu 7. Cho $S_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n=\frac{n-1}{2n-1}$. **B.** $S_n=\frac{n}{2n+1}$. **C.** $S_n=\frac{n}{3n-2}$. **D.** $S_n=\frac{n+2}{2n+5}$.

Lời giải. Cho $\begin{cases} n=1\longrightarrow S_1=\frac{1}{3} \\ n=2\longrightarrow S_2=\frac{6}{15} \\ n=3\longrightarrow S_3=\frac{3}{7}\end{cases}$. Kiểm tra các đáp án chỉ cho B thỏa. **Chọn B.**

Câu 8. Cho $P_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ với $n\geq 2$ và $n\in\mathbb{N}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P=\frac{n+1}{n+2}$. **B.** $P=\frac{n-1}{2n}$. **C.** $P=\frac{n+1}{n}$. **D.** $P=\frac{n+1}{2n}$.

Lời giải. Vì $n\geq 2$ nên ta cho $\begin{cases} n=2\longrightarrow P_2=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)=\frac{3}{4} \\ n=3\longrightarrow P_3=\left(1-\frac{1}{2^2}\right).\left(1-\frac{1}{3^2}\right)=\frac{2}{3}\end{cases}$.

Kiểm tra các đáp án chỉ cho D thỏa. **Chọn D.**

Câu 9. Với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, hệ thức nào sau đây là sai?

A. $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

B. $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$.

C. $1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

D. $2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Lời giải. Bằng cách thử với $n=1$, $n=2$, $n=3$ là ta kết luận được. **Chọn D.**

Câu 10. Xét hai mệnh đề sau:

I) Với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, số n^3+3n^2+5n chia hết cho 3.

II) Với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, ta có $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$.

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ I. **B.** Chỉ II. **C.** Không có. **D.** Cả I và II.

Lời giải. Chọn A.

● Ta chứng minh I) đúng.

Với $n=1$, ta có $u_1=1^3+3.1^2+5.1=9\,\vdots\,3$: đúng.

Giả sử mệnh đề đúng khi $n=k\ \ (k\geq 1)$, tức là $u_k=k^3+3k^2+5k\,\vdots\,3$.

Ta có $u_{k+1}=\left(k^3+3k^2+5k\right)+3k^2+9k+9=u_k+3\left(k^2+3k+3\right)\vdots\,3.$ Kết thúc chứng minh.

● Mệnh đề II) sai vì với $n=1,$ ta có $\text{VT}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}=\frac{12}{24}>\frac{13}{24}$: Vô lý.

2. DÃY SỐ

A. TÓM TẮC LÝ THUYẾT

1. Dãy số là tập hợp các giá trị của hàm số $u:\mathbb{N}^* \to \mathbb{R},\ n \to u(n)$

Được sắp xếp theo thứ tự tăng dần liên tiếp theo đối số tự nhiên n:

$$u(1), u(2), u(3), ..., u(n), ...$$

- Ta kí hiệu $u(n)$ bởi u_n và gọi là *số hạng thứ n* hay *số hạng tổng quát* của dãy số, u_1 được gọi là số hạng đầu của dãy số.
- Ta có thể viết dãy số dưới dạng khai triển $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ hoặc dạng rút gọn (u_n).

2. Người ta thường cho dãy số theo các cách:

- Cho số hạng tổng quát, tức là: cho hàm số u xác định dãy số đó
- Cho bằng công thức truy hồi, tức là:
  * Cho một vài số hạng đầu của dãy
  * Cho hệ thức biểu thị số hạng tổng quát qua số hạng (hoặc một vài số hạng) đứng trước nó.

3. Dãy số tăng, dãy số giảm

- Dãy số (u_n) gọi là dãy tăng nếu $u_n < u_{n+1}\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
- Dãy số (u_n) gọi là dãy giảm nếu $u_n > u_{n+1}\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

4. Dãy số bị chặn

- Dãy số (u_n) gọi là dãy bị chặn trên nếu có một số thực M sao cho $u_n < M\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) gọi là dãy bị chặn dưới nếu có một số thực m sao cho $u_n > m\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới gọi là dãy bị chặn, tức là tồn tại số thực dương M sao cho $|u_n| < M\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vấn đề 1. Xác định số hạng của dãy số

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho dãy số có 4 số hạng đầu là: $-1, 3, 19, 53$. Hãy tìm một quy luật của dãy số trên và viết số hạng thứ 10 của dãy với quy luật vừa tìm.

Ví dụ 2. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_n = \dfrac{n^2 + 3n + 7}{n+1}$

1. Viết năm số hạng đầu của dãy;

2. Dãy số có bao nhiêu số hạng nhận giá trị nguyên.

Ví dụ 3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 3\ \ \forall n \ge 2 \end{cases}$.

1. Viết năm số hạng đầu của dãy;

2. Chứng minh rằng $u_n = 2^{n+1} - 3$;

3. Số hạng thứ 2012^{2012} của dãy số có chia hết cho 7 không?

Ví dụ 4. Cho hai dãy số $(u_n), (v_n)$ được xác định như sau $u_1 = 3, v_1 = 2$ và $\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 + 2v_n^2 \\ v_{n+1} = 2u_n.v_n \end{cases}$ với $n \ge 2$.

1. Chứng minh : $u_n^2 - 2v_n^2 = 1$ và $u_n - \sqrt{2}v_n = \left(\sqrt{2} - 1\right)^{2^n}$ với $\forall n \ge 1$;

2. Tìm công thức tổng quát của hai dãy (u_n) và (v_n).

1I. BÀI TẬP TỰ LUẬN TỰ LUYỆN

Bài 1 Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$.

1. Viết năm số hạng đầu của dãy số.
2. Tìm số hạng thứ 100 và 200
3. Số $\frac{167}{84}$ có thuộc dãy số đã cho hay không
4. Dãy số có bao nhiêu số hạng là số nguyên.

Bài 2 Cho dãy số (a_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = -1, u_2 = 3 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1} \ \forall n \geq 2 \end{cases}$.

1. Viết 7 số hạng đầu tiên của dãy
2. Chứng minh rằng: $u_n = 5.3^{n-1} - 6.2^{n-1}$, $\forall n \geq 1$.

Bài 3 Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát: $u_n = 2n + \sqrt{n^2+4}$

1. Viết 6 số hạng đầu của dãy số
2. Tính u_{20}, u_{2010}
3. Dãy số đã cho có bao nhiêu số hạng là số nguyên.

Bài 4 Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = 2u_{n-1} + 3n - 1, \ n \geq 2 \end{cases}$

1. Tìm 5 số hạng đầu của dãy
2. Chứng minh rằng $u_n = 5.2^n - 3n - 5 \ \ \forall n = 1,2,3,...$
3. Tìm số dư của u_{2010} khi chia cho 3

Bài 5 Cho dãy số (u_n): $\begin{cases} u_1 = 2008; u_2 = 2009 \\ 2u_{n+1} = u_n + u_{n+2} \end{cases} \quad n \geq 1$

1. Chứng minh rằng dãy $(v_n): v_n = u_n - u_{n-1}$ là dãy không đổi
2. Biểu thị u_n qua u_{n-1} và tìm CTTQ của dãy số (u_n)

Bài 6 Cho dãy số (u_n): $\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_{n-1}} \end{cases} \quad n \geq 2$

1. Chứng minh rằng dãy $(v_n): v_n = \frac{u_n}{u_{n-1}}$ là dãy không đổi
2. Tìm công thức tổng quát của dãy (u_n).

Bài 7. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = 2u_{n-1} + 3, \ n \geq 2 \end{cases}$.

1. Tìm 6 số hạng đầu của dãy;
2. Chứng minh rằng $u_n = 5.2^{n-1} - 3$ với $\forall n \geq 2$;
3. Số hạng có 3 chữ số lớn nhất của dãy là bao nhiêu?

Bài 8. Cho dãy số (u_n) có 4 số hạng đầu là : $u_1 = 1, u_2 = 3, \ u_3 = 6, u_4 = 10$.

1. Hãy tìm một quy luật của dãy số trên;
2. Tìm ba số hạng tiếp theo của dãy số theo quy luật vừa tìm trên.

Bài 9

1. Cho dãy $(u_n): u_n = \frac{1}{2}\left[(2+\sqrt{5})^n + (2-\sqrt{5})^n\right]$.Chứng minh rằng u_{2n} là số tự nhiên chẵn và u_{2n+1} là số tự nhiên lẻ.

2. Cho dãy số $(u_n): u_n = (4-2\sqrt{3})^n + (4+2\sqrt{3})^n$. Chứng minh rằng tất cả các số hạng của dãy đều là số nguyên.

3. Cho dãy số $(u_n): \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \left[\frac{3}{2}u_n\right], n \ge 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng dãy (u_n) có vô hạn các số chẵn và vô hạn các số lẻ.

4. Chứng minh rằng tồn tại đúng 4 dãy số nguyên dương (u_n) thỏa: $u_0 = 1, u_1 = 2$ và $\left|u_{n+2}.u_n - u_{n+1}^2\right| = 1$.

Bài 10. (Dãy Fibonacci)

Cho dãy số (F_n) được xác định bởi $F_1 = 1, F_2 = 1$ và $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Chứng minh rằng:

1. $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

2. $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$ và $F_nF_{n+1} + F_{n+1}F_{n+2} = F_{2n+2}$ với mọi $n \ge 2$.

3. $F_n \,\vdots\, 5^k \Leftrightarrow n \,\vdots\, 5^k$.

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN

Câu 1. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \frac{-n}{n+1}$. Năm số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

A. $-\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}; -\frac{3}{4}; -\frac{4}{5}; -\frac{5}{6}$. **B.** $-\frac{2}{3}; -\frac{3}{4}; -\frac{4}{5}; -\frac{5}{6}; -\frac{6}{7}$.

C. $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}$. **D.** $\frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \frac{6}{7}$.

Câu 2. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \frac{n}{3^n - 1}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

A. $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}$. **B.** $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{3}{26}$. **C.** $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{16}$. **D.** $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}$.

Câu 3. Cho dãy số (u_n), biết $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$ với $n \ge 0$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó là lần lượt là những số nào dưới đây?

A. $-1; 2; 5$. **B.** $1; 4; 7$. **C.** $4; 7; 10$. **D.** $-1; 3; 7$.

Câu 4. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 3}$. Tìm số hạng u_5.

A. $u_5 = \frac{1}{4}$. **B.** $u_5 = \frac{17}{12}$. **C.** $u_5 = \frac{7}{4}$. **D.** $u_5 = \frac{71}{39}$.

Câu 5. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = (-1)^n.2n$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $u_1 = -2$. **B.** $u_2 = 4$. **C.** $u_3 = -6$. **D.** $u_4 = -8$.

Câu 6. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = (-1)^n.\frac{2^n}{n}$. Tìm số hạng u_3.

A. $u_3 = \frac{8}{3}$. **B.** $u_3 = 2$. **C.** $u_3 = -2$. **D.** $u_3 = -\frac{8}{3}$.

Câu 7. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 1) \end{cases}$. Tìm số hạng u_4.

A. $u_4 = \frac{5}{9}$. **B.** $u_4 = 1$. **C.** $u_4 = \frac{2}{3}$. **D.** $u_4 = \frac{14}{27}$.

Câu 8. Cho dãy (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 2 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $u_2 = \frac{5}{2}$. **B.** $u_3 = \frac{15}{4}$. **C.** $u_4 = \frac{31}{8}$. **D.** $u_5 = \frac{63}{16}$.

Câu 9. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \frac{n+1}{2n+1}$. Số $\frac{8}{15}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

A. 8. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 10. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \frac{2n+5}{5n-4}$. Số $\frac{7}{12}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

A. 8. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 10.

Câu 11. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = 2^n$. Tìm số hạng u_{n+1}.

A. $u_{n+1} = 2^n.2$. **B.** $u_{n+1} = 2^n + 1$.

C. $u_{n+1}=2(n+1)$. **D.** $u_{n+1}=2^n+2$.

Câu 12. Cho dãy số (u_n), biết $u_n=3^n$. Tìm số hạng u_{2n-1}.

A. $u_{2n-1}=3^2.3^n-1$. **B.** $u_{2n-1}=3^n.3^{n-1}$.

C. $u_{2n-1}=3^{2n}-1$. **D.** $u_{2n-1}=3^{2(n-1)}$.

Câu 13. Cho dãy số (u_n), với $u_n=5^{n+1}$. Tìm số hạng u_{n-1}.

A. $u_{n-1}=5^{n-1}$. **B.** $u_{n-1}=5^n$.

C. $u_{n-1}=5.5^{n+1}$. **D.** $u_{n-1}=5.5^{n-1}$.

Câu 14. Cho dãy số (u_n), với $u_n=\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3}$. Tìm số hạng u_{n+1}.

A. $u_{n+1}=\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2(n+1)+3}$. **B.** $u_{n+1}=\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2(n-1)+3}$.

C. $u_{n+1}=\left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+3}$. **D.** $u_{n+1}=\left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+5}$.

Câu 15. Dãy số có các số hạng cho bởi: $0;\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\cdots$. có số hạng tổng quát là công thức nào dưới đây?

A. $u_n=\frac{n+1}{n}$. **B.** $u_n=\frac{n}{n+1}$.

C. $u_n=\frac{n-1}{n}$. **D.** $u_n=\frac{n^2-n}{n+1}$.

Câu 16. Dãy số có các số hạnh cho bởi: $-1;1;-1;1;-1;\cdots$. có số hạng tổng quát là công thức nào dưới đây?

A. $u_n=1$. **B.** $u_n=-1$.

C. $u_n=(-1)^n$. **D.** $u_n=(-1)^{n+1}$.

Câu 17. Cho dãy số có các số hạng đầu là: $-2;0;2;4;6;\cdots$. Số hạng tổng quát của dãy số này là công thức nào dưới đây?

A. $u_n=-2n$. **B.** $u_n=n-2$.

C. $u_n=-2(n+1)$. **D.** $u_n=2n-4$.

Câu 18. Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases}u_1=2\\u_{n+1}=2u_n\end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n=n^{n-1}$. **B.** $u_n=2^n$. **C.** $u_n=2^{n+1}$. **D.** $u_n=2$.

Câu 19. Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases}u_1=\frac{1}{2}\\u_{n+1}=u_n-2\end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n=\frac{1}{2}+2(n-1)$. **B.** $u_n=\frac{1}{2}-2(n-1)$.

C. $u_n=\frac{1}{2}-2n$. **D.** $u_n=\frac{1}{2}+2n$.

Câu 20. Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases}u_1=2\\u_{n+1}-u_n=2n-1\end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n=2+(n-1)^2$. **B.** $u_n=2+n^2$.

C. $u_n=2+(n+1)^2$. **D.** $u_n=2-(n-1)^2$.

Câu 21. Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases}u_1=1\\u_{n+1}=u_n+n^2\end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n=1+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

B. $u_n=1+\frac{n(n-1)(2n+2)}{6}$.

C. $u_n=1+\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$.

D. $u_n=1+\frac{n(n+1)(2n-2)}{6}$.

Câu 22. Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases}u_1=-2\\u_{n+1}=-2-\frac{1}{u_n}\end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n=\frac{-n+1}{n}$. **B.** $u_n=\frac{n+1}{n}$.

C. $u_n=-\frac{n+1}{n}$. **D.** $u_n=-\frac{n}{n+1}$.

Câu 23. Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases}u_1=1\\u_{n+1}=u_n+(-1)^{2n}\end{cases}$.

Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n=1+n$. **B.** $u_n=1-n$.

C. $u_n=1+(-1)^{2n}$. **D.** $u_n=n$.

Câu 24. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n=2(3^n)$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Công thức truy hồi của dãy số đó là:

A. $\begin{cases}u_1=6\\u_n=6u_{n-1},\ n>1\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}u_1=6\\u_n=3u_{n-1},\ n>1\end{cases}$.

C. $\begin{cases}u_1=3\\u_n=3u_{n-1},\ n>1\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}u_1=3\\u_n=6u_{n-1},\ n>1\end{cases}$.

Câu 25. Cho dãy số (a_n), được xác định $\begin{cases}a_1=3\\a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n,\ n\ge 1\end{cases}$.

Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=\frac{93}{16}$. **B.** $a_{10}=\frac{3}{512}$.

C. $a_{n+1}+a_n=\frac{9}{2^n}$. **D.** $a_n=\frac{3}{2^n}$.

Vấn đề 2. Dãy số đơn điệu – Dãy số bị chặn

Phương pháp:

- Để xét tính đơn điệu của dãy số (u_n) ta xét : $k_n=u_{n+1}-u_n$

  * Nếu $k_n>0\ \forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow$ dãy (u_n) tăng

  * Nếu $k_n<0\ \forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow$ dãy (u_n) giảm.

Khi $u_n>0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ ta có thể xét $t_n=\frac{u_{n+1}}{u_n}$

  * Nếu $t_n>1\Rightarrow$ dãy (u_n) tăng

  * Nếu $t_n<1\Rightarrow$ dãy (u_n) giảm.

- Để xét tính bị chặn của dãy số ta có thể dự đoán rồi chứng minh bằng quy nạp.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho dãy số $(u_n):\begin{cases}u_1=2\\u_n=\frac{u_{n-1}+1}{2}\ \forall n\ge 2\end{cases}$. Chứng minh rằng dãy (u_n) là dãy giảm và bị chặn.

Ví dụ 2. Cho dãy số $(u_n):\begin{cases}u_1=1,u_2=2\\u_{n+1}=\sqrt{u_n}+\sqrt{u_{n-1}}\ \forall n\ge 2\end{cases}$. Chứng minh rằng dãy (u_n) là dãy tăng và bị chặn

1I. BÀI TẬP TỰ LUẬN TỰ LUYỆN

Bài 1 Xét tính tăng giảm của các dãy số sau

1. $u_n=\frac{3n^2-2n+1}{n+1}$ **2.** $u_n=n-\sqrt{n^2-1}$

3. $u_n=\frac{3^n-1}{2^n}$ **4.** $u_n=\frac{n+(-1)^n}{n^2}$

Bài 2 Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n), biết:

1. $u_n=\frac{2n-13}{3n-2}$ **2.** $u_n=\frac{n^2+3n+1}{n+1}$ **3.** $u_n=\frac{1}{\sqrt{1+n+n^2}}$

4. $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$ **5.** $u_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + ... + \dfrac{1}{n^2}$.

Bài 3. Xét tính bị chặn của các dãy số sau

1. $u_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$ **2.** $u_n = (-1)^n$ **3.** $u_n = 3n - 1$

4. $u_n = 4 - 3n - n^2$ **5.** $u_n = \dfrac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$ **6.** $u_n = \dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+1}}$

Bài 4. Xét tính bị chặn của các dãy số sau

1. $u_n = \dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{2.4} + ... + \dfrac{1}{n.(n+2)}$ **2.** $u_n = \dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{3.5} + ... + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

3. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \dfrac{u_{n-1}+2}{u_{n-1}+1} \quad , n \ge 2 \end{cases}$

Bài 5 Xét tính tăng giảm của các dãy số sau

1. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt[3]{u_n^3 + 1},\ n \ge 1 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 1}{4} \quad n \ge 1 \end{cases}$

Bài 6

1. Chứng minh rằng dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = \sqrt{2010 + \sqrt{2010 + ... + \sqrt{2010}}}$ (n dấu căn). Là một dãy tăng.

2. Cho dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2 \\ u_n = \sqrt[3]{u_{n-1}} + \sqrt[3]{u_{n-2}}, n \ge 3 \end{cases}$. Chứng minh rằng dãy (u_n) tăng và bị chặn.

3. Cho dãy số $(u_n): u_n = \dfrac{an+2}{2n-1},\ n \ge 1$

a) Khi $a = 4$, hãy tìm 5 số hạng đầu của dãy

b) Tìm a để dãy số đã cho là dãy số tăng.

4. Cho dãy số $(u_n): \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = 3u_{n-1} - 2,\ n = 2, 3.. \end{cases}$

a) Viết 6 số hạng đầu của dãy

b) Chứng minh $u_n = 3^{n-1} + 1,\ n = 1, 2, ...$

5. Cho dãy số $u_n = -5.2^{n-1} + 3^n + n + 2$, $n = 1, 2, ...$

a) Viết 5 số hạng đầu của dãy

b) Chứng minh rằng: $u_n = 2u_{n-1} + 3^{n-1} - n$.

Bài 7

1. Cho dãy số (u_n): $u_n = (1-a)^n + (1+a)^n$,trong đó $a \in (0;1)$ và n là số nguyên dương.

a)Viết công thức truy hồi của dãy số

b)Xét tính đơn điệu của dãy số

2. Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 3u_{n-1} + \dfrac{1}{2u_{n-1}} - 2,\ n \ge 2 \end{cases}$.

a) Viết 4 số hạng đầu của dãy và chứng minh rằng $u_n > 0,\ \forall n$

b) Chứng minh dãy (u_n) là dãy tăng.

3. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi : $\begin{cases} u_0 = 2011 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_n + 1},\ \forall n = 1, 2, ... \end{cases}$

a) Chứng minh rằng dãy (u_n) là dãy giảm

b) Tìm phần nguyên của u_n với $0 \le n \le 1006$.

4. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 2, u_2 = 6 \\ u_{n+2} = u_n + 2u_{n+1}, \ \forall n = 1,2,... \end{cases}$

a) Gọi a, b là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 1 = 0$. Chứng minh rằng: $u_n = a^n + b^n$

b) Chứng minh rằng: $u_{n+1}^2 - u_{n+2}u_n = (-1)^{n-1}.8$.

Bài 8 Xét tính tăng giảm và bị chặn của các dãy số sau

1. $(u_n): u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$

2. $(u_n): u_n = n^3 + 2n + 1$

3. $(u_n): \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}, \ \forall n \ge 2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} u_1 = 2, u_2 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}}, \ \forall n \ge 2 \end{cases}$.

Bài 9

1. Cho dãy số $(x_n): \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_n = \dfrac{2n}{(n-1)^2} \sum_{i=1}^{n-1} x_i, \ n = 2,3,... \end{cases}$

Xét dãy số $y_n = x_{n+1} - x_n$. Chứng minh rằng dãy (y_n) là một tăng và bị chặn.

2. Cho dãy số nguyên dương (u_n) thỏa : $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 3 \\ u_{n+2} = 1 + \left[\dfrac{u_{n+1}^2}{u_n}\right], \ n \ge 0 \end{cases}$.

Chứng minh rằng: $u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 = 2^n$ với mọi số tự nhiên n.

3. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 5u_n + \sqrt{24u_n^2 + 1}, \ n = 0,1,.. \end{cases}$.

Chứng minh rằng dãy số (u_n) là dãy số nguyên.

4. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_n = \dfrac{1}{2}\left[(2+\sqrt{5})^n + (2-\sqrt{5})^n\right]$

Chứng minh rằng u_{2n} là số tự nhiên chẵn và u_{2n+1} là số tự nhiên lẻ.

5. Cho hai dãy số $(x_n);(y_n)$ xác định :

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{3} \\ y_1 = \sqrt{3} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x_n = x_{n-1} + \sqrt{1 + x_{n-1}^2} \\ y_n = \dfrac{y_{n-1}}{1 + \sqrt{1 + y_{n-1}^2}} \end{cases}, \ \forall n \ge 2.$$

Chứng minh rằng $2 < x_n y_n < 3, \ \forall n \ge 2$.

6. Cho dãy số số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{1}{3u_n}\right) \end{cases}$.

Chứng minh rằng: $a_n = \dfrac{3}{3u_n^2 - 1}$ là một số chính phương.

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN

Câu 26. Cho các dãy số sau. Dãy số nào là dãy số tăng?

A. $1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\cdots$

B . $1;\ -\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{4};\ -\dfrac{1}{8};\ \dfrac{1}{16};\cdots$

C. $1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9;\cdots$

D. $1;\ \dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{4};\ \dfrac{1}{8};\ \dfrac{1}{16};\cdots$

Câu 27. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số tăng?

A. $u_n = \dfrac{1}{2^n}$. **B.** $u_n = \dfrac{1}{n}$.

C. $u_n = \dfrac{n+5}{3n+1}$. **D.** $u_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$.

Câu 28. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số tăng?

A. $u_n = \dfrac{2}{3^n}$. **B.** $u_n = \dfrac{3}{n}$.

C. $u_n = 2^n$. **D.** $u_n = (-2)^n$.

Câu 29. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số giảm?

A. $u_n = \dfrac{1}{2^n}$. **B.** $u_n = \dfrac{3n-1}{n+1}$.

C. $u_n = n^2$. **D.** $u_n = \sqrt{n+2}$.

Câu 30. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số giảm?

A. $u_n = \sin n$. **B.** $u_n = \dfrac{n^2+1}{n}$.

C. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$. **D.** $u_n = (-1)^n.(2^n+1)$.

Câu 31. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số $u_n = \dfrac{1}{n} - 2$ là dãy tăng.

B. Dãy số $u_n = (-1)^n(2^n+1)$ là dãy giảm.

C. Dãu số $u_n = \dfrac{n-1}{n+1}$ là dãy giảm.

D. Dãy số $u_n = 2n + \cos\dfrac{1}{n}$ là dãy tăng.

Câu 32. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Dãy số $u_n = \dfrac{1-n}{\sqrt{n}}$ là dãy giảm.

B. Dãy số $u_n = 2n^2 - 5$ là dãy tăng.

C. Dãy số $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ là dãy giảm.

D. Dãy số $u_n = n + \sin^2 n$ là dãy tăng.

Câu 33. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{3n-1}{3n+1}$. Dãy số (u_n) bị chặn trên bởi số nào dưới đây?

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 0.

Câu 34. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào bị chặn trên?

A. $u_n = n^2$. **B.** $u_n = 2^n$. **C.** $u_n = \dfrac{1}{n}$. **D.** $u_n = \sqrt{n+1}$.

Câu 35. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \cos n + \sin n$. Dãy số (u_n) bị chặn trên bởi số nào dưới đây?

A. 0. **B.** 1.

C. $\sqrt{2}$. **D.** Không bị chặn trên.

Câu 36. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \sin n - \cos n$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới bởi số nào dưới đây?

A. 0. **B.** -1.

C. $-\sqrt{2}$. **D.** Không bị chặn dưới.

Câu 37. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \sqrt{3}\cos n - \sin n$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và chặn trên lần lượt bởi các số m và M nào dưới đây?

A. $m=-2;\ M=2$. **B.** $m=-\dfrac{1}{2};\ M=\sqrt{3}+1$.

C. $m=-\sqrt{3}+1;\ M=\sqrt{3}-1$. **D.** $m=-\dfrac{1}{2};\ M=\dfrac{1}{2}$.

Câu 38. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = (-1)^n.5^{2n+5}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) bị chặn trên và không bị chặn dưới.

B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.

C. Dãy số (u_n) bị chặn.

D. Dãy số (u_n) không bị chặn.

Câu 39. Cho dãy số (u_n), với $u_n = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.5} + ... + \frac{1}{n(n+3)}, \forall n = 1;\ 2;\ 3\cdots$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) bị chặn trên và không bị chặn dưới.

B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.

C. Dãy số (u_n) bị chặn.

D. Dãy số (u_n) không bị chặn.

Câu 40. Cho dãy số (u_n), với $u_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}, \forall n = 2;\ 3;\ 4;\cdots$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) bị chặn trên và không bị chặn dưới.

B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.

C. Dãy số (u_n) bị chặn.

D. Dãy số (u_n) không bị chặn.

Câu 41. Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy số nào là dãy số bị chặn?

A. $u_n = \sqrt{n^2 + 1}$. **B.** $u_n = n + \frac{1}{n}$.

C. $u_n = 2^n + 1$. **D.** $u_n = \frac{n}{n+1}$.

Câu 42. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào bị chặn?

A. $u_n = \frac{1}{2^n}$. **B.** $u_n = 3^n$.

C. $u_n = \sqrt{n+1}$. **D.** $u_n = n^2$.

Câu 43. Cho dãy số (u_n), xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n},\ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\sqrt{6} \le u_n < \frac{5}{2}$. **B.** $\sqrt{6} \le u_n < 3$.

C. $\sqrt{6} \le u_n < 2$. **D.** $\sqrt{6} \le u_n \le 2\sqrt{3}$.

Câu 44. Cho dãy số (u_n), với $u_n = \sin\frac{\pi}{n+1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Số hạng thứ $n+1$ của dãy là $u_{n+1} = \sin\frac{\pi}{n+1}$.

B. Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn.

C. Dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

D. Dãy số (u_n) không tăng không giảm.

Câu 45. Cho dãy số (u_n), với $u_n = (-1)^n$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) là dãy số tăng.

B. Dãy số (u_n) là dãy số giảm.

C. Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn.

D. Dãy số (u_n) là dãy số không bị chặn.

DÃY SỐ

Vấn đề 1. Xác định số hạng của dãy số

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho dãy số có 4 số hạng đầu là: $-1,3,19,53$. Hãy tìm một quy luật của dãy số trên và viết số hạng thứ 10 của dãy với quy luật vừa tìm.

Lời giải.

Xét dãy (u_n) có dạng: $u_n = an^3 + bn^2 + cn + d$

Ta có hệ: $\begin{cases} a+b+c+d=-1 \\ 8a+4b+2c+d=3 \\ 27a+9b+3c+d=19 \\ 64a+16b+4c+d=53 \end{cases}$

Giải hệ trên ta tìm được: $a=1, b=0, c=-3, d=1$

$\Rightarrow u_n = n^3 - 3n + 1$ là một quy luật .

Số hạng thứ 10: $u_{10} = 971$.

Ví dụ 2. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_n = \dfrac{n^2+3n+7}{n+1}$

1. Viết năm số hạng đầu của dãy;

2. Dãy số có bao nhiêu số hạng nhận giá trị nguyên.

Lời giải.

1. Ta có năm số hạng đầu của dãy

$$u_1 = \frac{1^2+3.1+7}{1+1} = \frac{11}{2},\ u_2 = \frac{17}{3}, u_3 = \frac{25}{4}, u_4 = 7, u_5 = \frac{47}{6}$$

2. Ta có: $u_n = n + 2 + \dfrac{5}{n+1}$, do đó u_n nguyên khi và chỉ khi $\dfrac{5}{n+1}$ nguyên hay $n+1$ là ước của 5. Điều đó xảy ra khi $n+1=5 \Leftrightarrow n=4$

Vậy dãy số có duy nhất một số hạng nguyên là $u_4 = 7$.

Ví dụ 3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 3 \quad \forall n \ge 2 \end{cases}$.

1. Viết năm số hạng đầu của dãy;

2. Chứng minh rằng $u_n = 2^{n+1} - 3$;

3. Số hạng thứ 2012^{2012} của dãy số có chia hết cho 7 không?

Lời giải.

1. Ta có 5 số hạng đầu của dãy là:

$u_1 = 1;\ u_2 = 2u_1 + 3 = 5;\ u_3 = 2u_2 + 3 = 13;\ u_4 = 2u_3 + 3 = 29$

$u_5 = 2u_4 + 3 = 61$.

2. Ta chứng minh bài toán bằng phương pháp quy nạp

* Với $n = 1 \Rightarrow u_1 = 2^{1+1} - 3 = 1 \Rightarrow$ bài toán đúng với $N = 1$

* Giả sử $u_k = 2^{k+1} - 3$, ta chứng minh $u_{k+1} = 2^{k+2} - 3$

Thật vậy, theo công thức truy hồi ta có:

$u_{k+1} = 2u_k + 3 = 2(2^{k+1} - 3) + 3 = 2^{k+2} - 3$ đpcm.

3. Ta xét phép chia của n cho 3

* $n = 3k \Rightarrow u_n = 2(2^{3k} - 1) - 1$

Do $2^{3k} - 1 = 8^k - 1 = 7.A \vdots 7 \Rightarrow u_n$ không chia hết cho 7

* $n=3k+1\Rightarrow u_n=4(2^{3k}-1)+1\Rightarrow u_n$ không chia hết cho 7

* $n=3k+2\Rightarrow u_n=8(2^{3k}-1)+5\Rightarrow u_n$ không chia hết cho 7

Vậy số hạng thứ 2012^{2012} của dãy số không chia hết cho 7.

Ví dụ 4. Cho hai dãy số $(u_n),(v_n)$ được xác định như sau $u_1=3, v_1=2$ và $\begin{cases} u_{n+1}=u_n^2+2v_n^2 \\ v_{n+1}=2u_n.v_n \end{cases}$ với $n\ge 2$.

1. Chứng minh : $u_n^2-2v_n^2=1$ và $u_n-\sqrt{2}v_n=\left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n}$ với $\forall n\ge 1$;

2. Tìm công thức tổng quát của hai dãy (u_n) và (v_n).

Lời giải.

1. Ta chứng minh bài toán theo quy nạp

a) Chứng minh: $u_n^2-2v_n^2=1$ (1)

- Ta có $u_1^2-2v_1^2=3^2-2.2^2=1$ nên (1) đúng với $n=1$
- Giả sử $u_k^2-2v_k^2=1$, khi đó ta có:

$$u_{k+1}^2-2v_{k+1}^2=\left(u_k^2+2v_k^2\right)^2-2\left(2u_kv_k\right)=\left(u_k^2-2v_k^2\right)^2=1$$

Từ đó suy ra (1) đúng với $\forall n\ge 1$.

b) Chứng minh $u_n-\sqrt{2}v_n=\left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n}$ (2)

Ta có: $u_n-\sqrt{2}v_n=u_{n-1}^2+2v_{n-1}^2-2\sqrt{2}u_{n-1}v_{n-1}=\left(u_{n-1}-\sqrt{2}v_{n-1}\right)^2$

- Ta có: $u_1-\sqrt{2}v_1=3-2\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$ nên (2) đúng với $n=1$
- Giả sử $u_k-\sqrt{2}v_k=\left(\sqrt{2}-1\right)^{2^k}$, ta có:

$$u_{k+1}-\sqrt{2}v_{k+1}=\left(u_k-\sqrt{2}v_k\right)^2=\left(\sqrt{2}-1\right)^{2^{k+1}}$$

Vậy (2) đúng với $\forall n\ge 1$.

2. Theo kết quả bài trên và đề bài ta có: $u_n+\sqrt{2}v_n=\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n}$

Do đó ta suy ra $\begin{cases} 2u_n=\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n}+\left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n} \\ 2\sqrt{2}v_n=\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n}-\left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n} \end{cases}$

Hay $\begin{cases} u_n=\dfrac{1}{2}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n}+\left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n}\right] \\ v_n=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n}-\left(\sqrt{2}-1\right)^{2^n}\right] \end{cases}$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n=\dfrac{2n+1}{n+2}$.

1. Viết năm số hạng đầu của dãy số.

2. Tìm số hạng thứ 100 và 200

3. Số $\dfrac{167}{84}$ có thuộc dãy số đã cho hay không

4. Dãy số có bao nhiêu số hạng là số nguyên.

Bài 2 Cho dãy số (a_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = -1, u_2 = 3 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1} \ \forall n \ge 2 \end{cases}$.

1. Viết 7 số hạng đầu tiên của dãy

2. Chứng minh rằng: $u_n = 5.3^{n-1} - 6.2^{n-1}$, $\forall n \ge 1$.

Bài 3 Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát: $u_n = 2n + \sqrt{n^2 + 4}$

1. Viết 6 số hạng đầu của dãy số

2. Tính u_{20}, u_{2010}

3. Dãy số đã cho có bao nhiêu số hạng là số nguyên.

Bài 4 Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = 2u_{n-1} + 3n - 1,\ n \ge 2 \end{cases}$

1. Tìm 5 số hạng đầu của dãy

2. Chứng minh rằng $u_n = 5.2^n - 3n - 5 \ \forall n = 1, 2, 3, ...$

3. Tìm số dư của u_{2010} khi chia cho 3

Bài 5 Cho dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = 2008; u_2 = 2009 \\ 2u_{n+1} = u_n + u_{n+2} \end{cases} \quad n \ge 1$

1. Chứng minh rằng dãy $(v_n) : v_n = u_n - u_{n-1}$ là dãy không đổi

2. Biểu thị u_n qua u_{n-1} và tìm CTTQ của dãy số (u_n)

Bài 6 Cho dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_{n-1}} \end{cases} \quad n \ge 2$

1. Chứng minh rằng dãy $(v_n) : v_n = \dfrac{u_n}{u_{n-1}}$ là dãy không đổi

2. Tìm công thức tổng quát của dãy (u_n) .

Bài 7. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = 2u_{n-1} + 3,\ n \ge 2 \end{cases}$.

1. Tìm 6 số hạng đầu của dãy;

2. Chứng minh rằng $u_n = 5.2^{n-1} - 3$ với $\forall n \ge 2$;

3. Số hạng có 3 chữ số lớn nhất của dãy là bao nhiêu?

Bài 8. Cho dãy số (u_n) có 4 số hạng đầu là : $u_1 = 1, u_2 = 3,\ u_3 = 6, u_4 = 10$.

1. Hãy tìm một quy luật của dãy số trên;

2. Tìm ba số hạng tiếp theo của dãy số theo quy luật vừa tìm trên.

Bài 9

1. Cho dãy $(u_n) : u_n = \frac{1}{2}\left[(2 + \sqrt{5})^n + (2 - \sqrt{5})^n\right]$.Chứng minh rằng u_{2n} là số tự nhiên chẵn và u_{2n+1} là số tự nhiên lẻ.

2. Cho dãy số $(u_n) : u_n = (4 - 2\sqrt{3})^n + (4 + 2\sqrt{3})^n$. Chứng minh rằng tất cả các số hạng của dãy đều là số nguyên.

3. Cho dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \left[\dfrac{3}{2}u_n\right], n \ge 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng dãy (u_n) có vô hạn các số chẵn và vô hạn các số lẻ.

4. Chứng minh rằng tồn tại đúng 4 dãy số nguyên dương (u_n) thỏa: $u_0 = 1, u_1 = 2$ và $\left|u_{n+2}.u_n - u_{n+1}^2\right| = 1$.

Bài 10. (Dãy Fibonacci)

Cho dãy số (F_n) được xác định bởi $F_1 = 1, F_2 = 1$ và $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Chứng minh rằng:

1. $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

2. $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$ và $F_nF_{n+1} + F_{n+1}F_{n+2} = F_{2n+2}$ với mọi $n \ge 2$.

3. $F_n \vdots 5^k \Leftrightarrow n \vdots 5^k$.

ĐÁP ÁN

Bài 1:

1. Năm số hạng đầu của dãy là: $u_1 = 1, u_2 = \frac{5}{4}, u_3 = \frac{7}{5}, u_4 = \frac{3}{2}, u_5 = \frac{11}{7}$.

2. Số hạng thứ 100: $u_{100} = \frac{2.100+1}{100+2} = \frac{67}{34}$

Số hạng thứ 200: $u_{200} = \frac{2.200+1}{200+2} = \frac{401}{202}$

3. Giả sử $u_n = \frac{167}{84} \Rightarrow \frac{2n+1}{n+2} = \frac{167}{84} \Leftrightarrow 84(2n+1) = 167(n+2)$

$\Leftrightarrow n = 250$.

Vậy $\frac{167}{84}$ là số hạng thứ 250 của dãy số (u_n).

4. Ta có: $u_n = \frac{2(n+2)-3}{n+2} = 2 - \frac{3}{n+2}$

$\Rightarrow u_n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{3}{n+2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3 \vdots n+2 \Leftrightarrow n = 1$

Vậy dãy số có duy nhất một số hạng là số nguyên.

Bài 2

1. Bốn số hạng đầu của dãy:

$u_3 = 5u_2 - 6u_1 = 21$; $u_4 = 5u_3 - 6u_2 = 87$; $u_5 = 5u_4 - 6u_3 = 309$

$u_6 = 5u_5 - 6u_4 = 1023$; $u_7 = 5u_6 - 6u_5 = 3261$.

2. Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp

* $u_1 = 5.3^0 - 6.2^0 = -1$ (đúng).

* Giả sử $u_k = 5.3^{k-1} - 6.2^{k-1}$, $\forall k \ge 2$.

Khi đó, theo công thức truy hồi ta có:

$u_{k+1} = 5.u_k - 6u_{k-1} = 5\left(5.3^{k-1} - 6.2^{k-1}\right) - 6\left(5.3^{k-2} - 6.2^{k-2}\right)$

$= 5\left(5.3^{k-1} - 6.3^{k-2}\right) - 6\left(5.2^{k-1} - 6.2^{k-2}\right)$

$= 5.3^k - 6.2^k$ đpcm.

Chú ý: Ta có bài toán tổng quát sau

Cho dãy $(u_n): \begin{cases} u_1, u_2 \\ a.u_{n+1} + bu_n + cu_{n-1} = 0 \ \forall n \ge 2 \end{cases}$, với $b^2 - 4ac > 0$

Khi đó: $u_n = \alpha.x_1^{n-1} + \beta.x_2^{n-1}$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (*) và $\alpha, \beta: \begin{cases} \alpha.x_1 + \beta.x_2 = u_1 \\ \alpha.x_1^2 + \beta.x_2^2 = u_2 \end{cases}$.

Phương trình (*) gọi là phương trình đặc trưng của dãy.

Bài 3

1. Ta có: $u_1 = 2 + \sqrt{5}; u_2 = 4 + 2\sqrt{2}; u_3 = 6 + \sqrt{13}; u_4 = 8 + 2\sqrt{5}$

$u_5 = 10 + \sqrt{29}; u_6 = 12 + 2\sqrt{10}$.

2. Ta có: $u_{20} = 40 + 2\sqrt{101}$; $u_{2010} = 4020 + \sqrt{2010^2 + 4}$

3. Ta có: u_n nguyên $\Leftrightarrow \sqrt{n^2 + 4} = k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow k^2 - n^2 = 4$

$\Leftrightarrow (k-n)(k+n)=4$ phương trình này vô nghiệm

Vậy không có số hạng nào của dãy nhận giá trị nguyên.

Bài 4

1 Ta có: $u_1=2; u_2=9; u_3=26; u_4=63; u_5=140$

2. Chứng minh bằng phương pháp quy nạp

3. Ta có: $5.2^{2010}\equiv 1.(-1)^{2010}=1(\text{mod } 3)$

Suy ra $u_{2010}\equiv 2(\text{mod } 3)$.

Bài 5

1. Ta có: $u_{n+2}-u_{n+1}=u_{n+1}-u_n \Rightarrow v_{n+2}=v_{n+1}=...=v_2=1$

2. Ta có: $u_n-u_{n-1}=1\Rightarrow u_n=u_{n-1}+1$

Suy ra $u_n=\left(u_n-u_{n-1}\right)+\left(u_{n-1}-u_{n-2}\right)+...+\left(u_2-u_1\right)+u_1$

$=1+1+...+1+u_1=n-1+2008=n+2007$.

Bài 6

1. Ta có: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{u_n}{u_{n-1}}=...=\dfrac{u_2}{u_1}=2$

2. Ta có $u_n=2u_{n-1}=...2^{n-1}u_1=2^{n-1}$

Bài 7.

1. Ta có 6 số hạng đầu của dãy là:

$$u_2=2u_1+3=7, u_3=17, u_4=37, u_5=77, u_6=157$$

2. Ta chứng minh bài toán bằng phương pháp quy nạp

Với $n=2$ ta có: $u_2=5.2-3=7$ (đúng)

Giả sử $u_k=5.2^{k-1}-3$, khi đó ta có:

$$u_{k+1}=2u_k+3=2\left(5.2^{k-1}-3\right)+3=5.2^k-3$$

Vậy bài toán được chứng minh theo nguyên lí quy nạp.

3. Ta có $u_n<1000\Leftrightarrow 2^{n-1}<\dfrac{1003}{5}$.

Mà 2^9 là lũy thừa lớn nhất của 2 lớn nhất có 3 chữ số nên ta có:

$2^{n-1}=2^9\Rightarrow n=10$.

Vậy u_{10} là số hạng cần tìm.

Bài 8.

1. Vì dãy số cho giá trị của 4 số hạng đầu ứng với 4 giá trị tương ứng của $n=1,2,3,4$ nên ta chỉ cần xác định một hàm số theo n mà ta phải tìm 4 ẩn là được. Chẳng hạn ta xét $u_n=an^3+bn^2+cn+d$

Theo bài ra ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} a+b+c+d=1 \\ 8a+4b+2c+d=3 \\ 27a+9b+3c+d=6 \\ 64a+16b+4c+d=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c+d=1 \\ 7a+3b+c=2 \\ 26a+8b+2c=5 \\ 21a+5b+c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0, b=c=\dfrac{1}{2} \\ d=0 \end{cases}$$

Nên $u_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ là một dãy thỏa đề bài.

2. Ta có ba số hạng tiếp theo của dãy là: $u_5=15, u_6=21, u_7=28$.

Bài 9

1. Đặt $a=2+\sqrt{5}, b=2-\sqrt{5}\Rightarrow \begin{cases} a+b=4 \\ ab=-1 \end{cases}$. Khi đó:

$u_n=\frac{1}{2}(a^n+b^n)=\frac{1}{2}\left[(a+b)(a^{n-1}+b^{n-1})-ab(a^{n-2}+b^{n-2})\right]$

$=4.\frac{a^{n-1}+b^{n-1}}{2}+\frac{a^{n-2}+b^{n-2}}{2}=4u_{n-1}+u_{n-2}$

Ta chứng minh bài toán bằng phương pháp quy nạp

* $u_1=2$ là số chẵn và $u_2=9$ là số lẻ

* Giả sử u_{2k} là số lẻ và u_{2k-1} là số chẵn.

Khi đó: $u_{2k+1}=4u_{2k}+u_{2k-1}$ là số chẵn, $u_{2k+2}=4u_{2k+1}+u_{2k}$ là số lẻ

Từ đó ta có đpcm.

2. Ta chứng minh được: $u_n=8u_{n-1}-4u_{n-2}$. Từ đây suy ra đpcm.

3. Ta chứng minh bài toán bằng phương pháp phản chứng

• Giả sử dãy (u_n) có hữu hạn các số chẵn, giả sử u_k là số hạng lớn nhất của dãy là số chẵn. Khi đó u_n lẻ với $\forall n\ge k+1$.

Đặt $u_{k+1}=2^m.p+1$ với $m,p\in\mathbb{N},p$ lẻ. Khi đó:

$u_{k+1}=\left[3p.2^{m-1}+\frac{3}{2}\right]=3p.2^{m-1}+1$

$u_{k+2}=3p.2^{m-2}+1,\ldots,\ u_{k+m}=3p.2^0+1=3p+1$ là số lẻ, suy ra vô lí.

Nên dãy (u_n) chứa vô hạn số chẵn.

• Chứng minh tương tự ta cũng có dãy (u_n) chứa vô hạn số lẻ.

4. Ta có: $|u_2-4|=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}u_2=5\Rightarrow u_3=12,u_3=13\\u_2=3\Rightarrow u_3=4,u_3=5\end{array}\right.$

a) Ta chứng minh tồn tại duy nhất dãy số nguyên dương (u_n) thỏa

$u_0=1,u_1=2,u_2=3,u_3=5$ và $\left|u_{n+2}.u_n-u_{n+1}^2\right|=1,\ \forall n\ge 4$ (1)

• Chứng minh tồn tại:

Xét dãy $(v_n):\begin{cases}v_0=1,v_1=2\\v_{n+1}=v_n+v_{n-1},\ n=2,3,...\end{cases}$

Bằng quy nạp ta chứng minh được (v_n) thỏa mãn (1).

Thật vậy: $\left|v_{n+2}.v_n-v_{n+1}^2\right|=\left|v_n\left(v_{n+1}+v_n\right)-v_{n+1}^2\right|$

$$=\left|v_{n+1}\left(v_n-v_{n+1}\right)+v_n^2\right|=\left|v_n^2-v_{n-1}v_{n+1}\right|=1$$

• Chứng minh duy nhất.

Trước hết ta chứng minh nếu dãy (u_n) thỏa (1) thì (u_n) là dãy tăng.

Giả sử $a_{n+1}>a_n\Rightarrow a_{n+1}-1\ge a_n$

Từ $\left|a_{n+2}a_n-a_{n+1}^2\right|=1\Rightarrow a_{n+2}=\frac{a_{n+1}^2\pm1}{a_n}\ge\frac{a_{n+1}^2\pm1}{a_{n+1}-1}>a_{n+1}+1>a_{n+1}$

Nên theo quy nạp ta có đpcm.

Giả sử tồn tại k để $v_k\ne u_k$ và $v_n=u_n,\ \forall n<k$. Khi đó

Ta giả sử $v_k<u_k$, suy ra: $\begin{cases}u_k.u_{k-2}=u_{k-1}^2+1\\v_k.v_{k-2}=v_{k-1}^2-1\end{cases}$

$\Rightarrow u_{k-2}\left(u_k-v_k\right)=2\Rightarrow 2\,\vdots\, u_{k-2}$ điều này vô lí.

Do vậy tồn tại duy nhất dãy nguyên dương (u_n) (đó chính là dãy (v_n)) thỏa mãn (1).

b) Tương tự ta chứng minh được tồn tại dũy nhất các dãy nguyên dương thỏa:

$$u_0=1,u_1=2,u_2=3,u_3=4,\left|u_{n+2}u_n-u_{n+1}^2\right|=1$$

$$u_0=1,u_1=2,u_2=5,u_3=12,\left|u_{n+2}u_n-u_{n+1}^2\right|=1$$

$$u_0=1,u_1=2,u_2=5,u_3=13,\left|u_{n+2}u_n-u_{n+1}^2\right|=1.$$

Đó là các dãy tương ứng là:

$$u_0=1,u_1=2,u_{n+1}=2u_{n+1}-u_n$$
$$u_0=1,u_1=2,u_{n+1}=2u_{n+1}+u_n$$
$$u_0=1,u_1=2,u_{n+1}=3u_{n+1}-u_n.$$

Vậy tồn tại đúng 4 dãy số nguyên dương thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 10.

1. Trước hết ta thấy dãy (F_n) tồn tại và duy nhất.

Xét $x_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(a^n-b^n\right)$

Với $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2},b=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Rightarrow\begin{cases}a+b=1\\ab=-1\end{cases}$

Ta có: $x_1=x_2=1$ và

$$x_{n-1}+x_{n-2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(a^{n-1}-b^{n-1}+a^{n-2}-b^{n-2}\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[a^{n-2}(a+1)-b^{n-2}(b+1)\right]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[a^{n-2}.\frac{3+\sqrt{5}}{2}-b^{n-2}.\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[a^{n-2}.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-b^{n-2}.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(a^n-b^n\right)=x_n$$

Vậy ta có: $F_n=x_n,\ \forall n\ge 1$.

2. Ta chứng minh đồng thời hai tính chất trên theo quy nạp

Với $n=2$ ta có: $F_2^2+F_3^2=1^2+2^2=5=F_5$

Và $F_2F_3+F_3F_4=1.2+2.3=8=F_6$

Giả sử $F_k^2+F_{k+1}^2=F_{2k+1}$ và $F_kF_{k+1}+F_{k+1}F_{k+2}=F_{2k+2}$ với $k\ge 2$

Ta có: $F_{k+1}^2+F_{k+2}^2=F_{k+1}^2+\left(F_k+F_{k+1}\right)^2=F_{k+1}^2+F_k^2+F_{k+1}^2+2F_kF_{k+1}$

$$=F_{k+1}\left(F_{k+1}+2F_k\right)+\left(F_k^2+F_{k+1}^2\right)$$
$$=F_{k+1}\left(F_{k+2}+F_k\right)+F_{2k+1}=F_{2k+2}+F_{2k+1}=F_{2k+3}.$$

Và: $F_kF_{k+1}+F_{k+1}F_{k+2}=F_k\left(F_k+F_{k-1}\right)+F_{k+1}\left(F_{k+1}+F_k\right)$

$$=F_kF_{k-1}+F_k^2+F_{k+1}^2+F_{k+1}F_k$$
$$=\left(F_kF_{k-1}+F_kF_{k+1}\right)+\left(F_k^2+F_{k+1}^2\right)$$
$$=F_{2k+2}+F_{2k+3}=F_{2k+5}.$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

3.

- Trước hết ta chứng minh:

$$F_{5n}=5F_nq_n \text{ với } q_n \text{ không chia hết cho 5} \quad (1)$$

Ta có : $\sqrt{5}F_{5n}=a^{5n}-b^{5n}$

Đặt $x=a^n,y=b^n$, như vậy ta có $xy=(ab)^n=(-1)^n$

Do đó : $\sqrt{5}F_{5n}=(x-y)\left[x^4+xy(x^2+y^2)+x^2y^2+y^4\right]$ (2)

Mặt khác : $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=5F_n^2+2(-1)^n$

$$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=\left[5F_n^2+2(-1)^n\right]^2-2$$

$$=25F_n^4+20(-1)^nF_n^2+2 \quad (3).$$

Từ đó, ta có: $F_{5n}=\sqrt{5}F_n\left[25F_n^4+20(-1)^nF_n^2+2+5(-1)^nF_n^2+2+1\right]$

Hay $F_{5n}=5F_n\left[5F_n^4+5F_n^2(-1)^2+1\right]=5F_nq_n$,

trong đó: $q_n=5F_n^4+5F_n^2(-1)^n+1$. Rõ ràng ta thấy q_n không chia hết cho 5.

- Với số tự nhiên n, ta phân tích $n=5^st$ với $(t,5)=1$.

Khi đó từ (1) ta có $F_n=5^sF_tA_n$ trong đó A_n không là bội của 5.

Nếu t không là bội của 5 thì F_t không là bội của 5, do đó

$F_n \vdots 5^k \Leftrightarrow s\ge k \Leftrightarrow n \vdots 5^k$ (đpcm).

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho dãy số (u_n), biết $u_n=\frac{-n}{n+1}$. Năm số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

A. $-\frac{1}{2};-\frac{2}{3};-\frac{3}{4};-\frac{4}{5};-\frac{5}{6}$.
B. $-\frac{2}{3};-\frac{3}{4};-\frac{4}{5};-\frac{5}{6};-\frac{6}{7}$.
C. $\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\frac{5}{6}$.
D. $\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\frac{5}{6};\frac{6}{7}$.

Lời giải. Ta có $u_1=-\frac{1}{2};\ u_2=-\frac{2}{3};\ u_3=-\frac{3}{4};\ u_4=-\frac{4}{5};\ u_5=-\frac{5}{6}$. **Chọn A.**

Nhận xét: (i) Dùng MTCT chức năng CALC để kiểm tra (tính) nhanh.

(ii) Ta thấy dãy (u_n) là dãy số âm nên loại các phương án C, D. Đáp án đúng là A hoặc B. Ta chỉ cần kiểm tra một số hạng nào đó mà cả hai đáp án khác nhau là được. Chẳng hạng kiểm tra u_1 thì thấy $u_1=-\frac{1}{2}$ nên chọn A.

Câu 2. Cho dãy số (u_n), biết $u_n=\frac{n}{3^n-1}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

A. $\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8}$.
B. $\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{3}{26}$.
C. $\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{16}$.
D. $\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4}$.

Lời giải. Dùng MTCT chức năng CALC: ta có

$$u_1=\frac{1}{2};\ u_2=\frac{2}{3^2-1}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4};\ u_3=\frac{3}{3^3-1}=\frac{3}{26}.$$ **Chọn B.**

Câu 3. Cho dãy số (u_n), biết $\begin{cases}u_1=-1\\ u_{n+1}=u_n+3\end{cases}$ với $n\ge 0$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó là lần lượt là những số nào dưới đây?

A. $-1;2;5$.
B. $1;4;7$.
C. $4;7;10$.
D. $-1;3;7$.

Lời giải. Ta có $u_1 = -1;\ u_2 = u_1 + 3 = 2;\ u_3 = u_2 + 3 = 5.$ **Chọn A.**

Nhận xét: (i) Dùng chức năng "lặp" của MTCT để tính:

Nhập vào màn hình: $X = X + 3.$

Bấm CALC và cho $X = -1$ (ứng với $u_1 = -1$)

Để tính u_n cần bấm "=" ra kết quả liên tiếp $n-1$ lần. Ví dụ để tính u_2 ta bấm "=" ra kết quả lần đầu tiên, bấm "=" ra kết quả thứ hai chính là $u_3, ...$

(ii) Vì $u_1 = -1$ nên loại các đáp án B, C. Còn lại các đáp án A, C; để biết đáp án nào ta chỉ cần kiểm tra u_2 (vì u_2 ở hai đáp án là khác nhau): $u_2 = u_1 + 3 = 2$ nên chọn A.

Câu 4. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{2n^2 - 1}{n^2 + 3}$. Tìm số hạng u_5.

A. $u_5 = \dfrac{1}{4}.$ **B .** $u_5 = \dfrac{17}{12}.$ **C.** $u_5 = \dfrac{7}{4}.$ **D.** $u_5 = \dfrac{71}{39}.$

Lời giải. Thế trực tiếp hoặc dùng chức năng CALC: $u_5 = \dfrac{2.5^2 - 1}{5^2 + 3} = \dfrac{49}{28} = \dfrac{7}{4}.$ **Chọn C.**

Câu 5. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = (-1)^n.2n.$ Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $u_1 = -2.$ **B.** $u_2 = 4.$ **C.** $u_3 = -6.$ **D.** $u_4 = -8.$

Lời giải. Thay trực tiếp hoặc dùng chức năng CALC:

$$u_1 = -2.1 = -2;\ u_2 = (-1)^2.2.2 = 4,\ u_3 = (-1)^3\,2.3 = -6;\ u_4 = (-1)^4\,2.4 = 8.$$ **Chọn D.**

Nhận xét: Dễ thấy $u_n > 0$ khi n chẵn và ngược lại nên đáp án D sai.

Câu 6. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = (-1)^n.\dfrac{2^n}{n}.$ Tìm số hạng u_3.

A. $u_3 = \dfrac{8}{3}.$ **B.** $u_3 = 2.$ **C.** $u_3 = -2.$ **D.** $u_3 = -\dfrac{8}{3}.$

Lời giải. Thay trực tiếp hoặc dùng chức năng CALC: $u_3 = (-1)^3.\dfrac{2^3}{3} = -\dfrac{8}{3}.$ **Chọn D.**

Câu 7. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + 1) \end{cases}$. Tìm số hạng u_4.

A. $u_4 = \dfrac{5}{9}.$ **B .** $u_4 = 1.$ **C.** $u_4 = \dfrac{2}{3}.$ **D.** $u_4 = \dfrac{14}{27}.$

Lời giải. Ta có

$$u_2 = \frac{1}{3}(u_1 + 1) = \frac{1}{3}(2 + 1) = 1;\ u_3 = \frac{1}{3}(u_2 + 1) = \frac{2}{3};\ u_4 = \frac{1}{3}(u_3 + 1) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3} + 1\right) = \frac{5}{9}.$$ **Chọn A.**

Nhận xét: Có thể dùng chức năng "lặp" trong MTCT để tính nhanh.

Câu 8. Cho dãy (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + 2 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $u_2 = \dfrac{5}{2}$. **B.** $u_3 = \dfrac{15}{4}$. **C.** $u_4 = \dfrac{31}{8}$. **D.** $u_5 = \dfrac{63}{16}$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} u_2 = \dfrac{u_1}{2} + 2 = \dfrac{3}{2} + 2 = \dfrac{7}{2};\ u_3 = \dfrac{u_2}{2} + 2 = \dfrac{7}{4} + 2 = \dfrac{15}{4} \\ u_4 = \dfrac{u_3}{2} + 2 = \dfrac{15}{8} + 2 = \dfrac{31}{8};\ u_5 = \dfrac{u_4}{2} + 2 = \dfrac{31}{16} + 2 = \dfrac{63}{16}. \end{cases}$ **Chọn A.**

Nhận xét: Dùng chức năng "lặp" trong MTCT để tính nhanh.

Câu 9. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{n+1}{2n+1}$. Số $\dfrac{8}{15}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

A. 8. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải. Ta cần tìm n sao cho $u_n = \dfrac{n+1}{2n+1} = \dfrac{8}{15} \Leftrightarrow 15n + 15 = 16n + 8 \Leftrightarrow n = 7$. **Chọn D.**

Nhận xét: Có thể dùng chức năng CALC để kiểm tra nhanh.

Câu 10. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{2n+5}{5n-4}$. Số $\dfrac{7}{12}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

A. 8. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải. Dùng chức năng "lặp" để kiểm tra đáp án. Hoặc giải cụ thể như sau:

$$u_n = \frac{2n+5}{5n-4} = \frac{7}{12} \Leftrightarrow 24n + 60 = 35n - 28 \Leftrightarrow 11n = 88 \Leftrightarrow n = 8.$$ **Chọn A.**

Câu 11. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = 2^n$. Tìm số hạng u_{n+1}.

A. $u_{n+1} = 2^n.2$. **B.** $u_{n+1} = 2^n + 1$. **C.** $u_{n+1} = 2(n+1)$. **D.** $u_{n+1} = 2^n + 2$.

Lời giải. Thay n bằng $n+1$ trong công thức u_n ta được: $u_{n+1} = 2^{n+1} = 2.2^n$. **Chọn A.**

Câu 12. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = 3^n$. Tìm số hạng u_{2n-1}.

A. $u_{2n-1} = 3^2.3^n - 1$. **B.** $u_{2n-1} = 3^n.3^{n-1}$.

C. $u_{2n-1} = 3^{2n} - 1$. **D.** $u_{2n-1} = 3^{2(n-1)}$.

Lời giải. Ta có $u_n = 3^n \xrightarrow{n \leftrightarrow 2n-1} u_{2n-1} = 3^{2n-1} = 3^n.3^{n-1}$. **Chọn B.**

Câu 13. Cho dãy số (u_n), với $u_n = 5^{n+1}$. Tìm số hạng u_{n-1}.

A. $u_{n-1} = 5^{n-1}$. **B.** $u_{n-1} = 5^n$. **C.** $u_{n-1} = 5.5^{n+1}$. **D.** $u_{n-1} = 5.5^{n-1}$.

Lời giải. $u_n = 5^{n+1} \xrightarrow{n \leftrightarrow n-1} u_{n-1} = 5^{(n-1)+1} = 5^n$. **Chọn B.**

Câu 14. Cho dãy số (u_n), với $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3}$. Tìm số hạng u_{n+1}.

A. $u_{n+1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2(n+1)+3}$. **B.** $u_{n+1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2(n-1)+3}$.

C. $u_{n+1} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+3}$. **D.** $u_{n+1} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+5}$.

Lời giải. $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3} \xrightarrow{n \leftrightarrow n+1} u_{n+1} = \left(\frac{(n+1)-1}{(n+1)+1}\right)^{2(n+1)+3} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+5}$. **Chọn D.**

Câu 15. Dãy số có các số hạng cho bởi: $0;\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\cdots$. có số hạng tổng quát là công thức nào dưới đây?

A. $u_n = \frac{n+1}{n}$. **B.** $u_n = \frac{n}{n+1}$. **C.** $u_n = \frac{n-1}{n}$. **D.** $u_n = \frac{n^2-n}{n+1}$.

Lời giải. Vì $u_1 = 0$ nên loại các đáp án A và B. Ta kiểm tra $u_2 = \frac{1}{2}$ ở các đáp án C, D:

Xét đáp án C: $u_n = \frac{n-1}{n} \longrightarrow u_2 = \frac{1}{2} \longrightarrow$ **Chọn C.**

Xét đáp án D: $u_n = \frac{n^2-n}{n+1} \longrightarrow u_2 = \frac{2}{3} \neq \frac{1}{2} \longrightarrow$ loại D.

Nhận xét: $u_1 = 0 = \frac{1-1}{1}$; $u_2 = \frac{1}{2} = \frac{2-1}{2}$; $u_3 = \frac{2}{3} = \frac{3-1}{3}$,... nên đoán $u_n = \frac{n-1}{n}$.

Câu 16. Dãy số có các số hạnh cho bởi: $-1;1;-1;1;-1;\cdots$. có số hạng tổng quát là công thức nào dưới đây?

A. $u_n = 1$. **B.** $u_n = -1$. **C.** $u_n = (-1)^n$. **D.** $u_n = (-1)^{n+1}$.

Lời giải. Vì dãy số đa cho không phải là dãy hằng nên loại các đáp án A và B. Ta kiểm tra $u_1 = -1$ ở các đáp án C, D:

Xét đáp án C: $u_n = (-1)^n \longrightarrow u_1 = -1 \longrightarrow$ **Chọn C.**

Xét đáp án D: $u_n = (-1)^{n+1} \longrightarrow u_1 = (-1)^2 = 1 \neq -1 \longrightarrow$ loại D.

Câu 17. Cho dãy số có các số hạng đầu là: $-2;0;2;4;6;\cdots$. Số hạng tổng quát của dãy số này là công thức nào dưới đây?

A. $u_n = -2n$. **B.** $u_n = n-2$. **C.** $u_n = -2(n+1)$. **D.** $u_n = 2n-4$.

Lời giải. Kiểm tra $u_1 = -2$ ta loại các đáp án B, C. Ta kiểm tra $u_2 = 0$ ở các đáp án A, D:

Xét đáp án A: $u_n = 2n \Rightarrow u_2 = 4 \neq 0 \longrightarrow$ loại A.

Xét đáp án D: $u_n = 2n-4 = 2.2-4 = 0 \longrightarrow$ **Chọn D.**

Nhận xét: Dãy $2;4;6;...$ có công thức là $2n\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ nên dãy $-2;0;2;4;6;\cdots$. có được bằng cách "tịnh tiến" $2n$ sang trái 4 đớn vị, tức là $2n-4$.

Câu 18. Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases}u_1=2\\u_{n+1}=2u_n\end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n=n^{n-1}$. **B.** $u_n=2^n$. **C.** $u_n=2^{n+1}$. **D.** $u_n=2$.

Lời giải. Từ công thức $\begin{cases}u_1=2\\u_{n+1}=2u_n\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}u_1=2\\u_2=2u_1=2.2=4\\u_3=2u_2=2.4=8\end{cases}$.

Xét đáp án A với $n=1\longrightarrow u_1=1^{1-1}=1^0=1\longrightarrow$ A loại.

Xét đáp án B, ta thấy đều thỏa mãn. **Chọn B.**

Xét đáp án C với $n=1\longrightarrow u_1=2^{1+1}=2^2=4\longrightarrow$ C loại.

Dễ thấy đáp án D không thỏa mãn.

Câu 19. Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases}u_1=\dfrac{1}{2}\\u_{n+1}=u_n-2\end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n=\dfrac{1}{2}+2(n-1)$. **B.** $u_n=\dfrac{1}{2}-2(n-1)$.

C. $u_n=\dfrac{1}{2}-2n$. **D.** $u_n=\dfrac{1}{2}+2n$.

Lời giải. Từ công thức $\begin{cases}u_1=\dfrac{1}{2}\\u_{n+1}=u_n-2\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}u_1=\dfrac{1}{2}\\u_2=u_1-2=\dfrac{1}{2}-2=-\dfrac{3}{2}\\u_3=u_2-2=-\dfrac{3}{2}-2=-\dfrac{7}{2}\end{cases}$.

Xét đáp án A với $n=2\longrightarrow u_2=\dfrac{1}{2}+2(2-1)=\dfrac{5}{2}\longrightarrow$ A loại.

Xét đáp án B, ta thấy đều thỏa mãn. **Chọn B.**

Xét đáp án C với $n=2\longrightarrow u_2=\dfrac{1}{2}-2.2=\dfrac{1}{2}-4=-\dfrac{7}{2}\longrightarrow$ C loại.

Xét đáp án D với $n=1\longrightarrow u_1=\dfrac{1}{2}+2.1=\dfrac{5}{2}\longrightarrow$ D loại.

Câu 20. Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases}u_1=2\\u_{n+1}-u_n=2n-1\end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n=2+(n-1)^2$. **B.** $u_n=2+n^2$.

C. $u_n = 2 + (n+1)^2$. **D.** $u_n = 2 - (n-1)^2$.

Lời giải. Kiểm tra $u_1 = 2$ ta loại các đáp án B và C. Ta có $u_2 = u_1 + 2.1 - 1 = 3$.

Xét đáp án A: $u_n = 2 + (n-1)^2 \longrightarrow u_2 = 3 \longrightarrow$ **Chọn A.**

Hoặc kiểm tra: $u_{n+1} - u_n = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$.

Xét đáp án D: $u_n = 2 - (n-1)^2 \longrightarrow u_2 = 1 \longrightarrow$ loại D. Hoặc kiểm tra:

$$u_{n+1} - u_n = (n-1)^2 - n^2 = -2n + 1 \neq 2n - 1.$$

Câu 21. Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. **B.** $u_n = 1 + \frac{n(n-1)(2n+2)}{6}$.

C. $u_n = 1 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$. **D.** $u_n = 1 + \frac{n(n+1)(2n-2)}{6}$.

Lời giải. Kiểm tra $u_1 = 1$ ta loại đáp án A. Ta có $u_2 = u_1 + 1^2 = 2$.

Xét đáp án B: $u_n = 1 + \frac{n(n-1)(2n+2)}{6} \longrightarrow u_2 = 1 + \frac{2.1.6}{6} = 3 \neq 2 \longrightarrow$ B loại.

Xét đáp án C: $u_n = u_n = 1 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \longrightarrow u_2 = 1 + \frac{2.1.3}{6} = 2 \longrightarrow$ **Chọn C.**

Xét đáp án D: $u_n = 1 + \frac{n(n+1)(2n-2)}{6}. \longrightarrow u_2 = 1 + \frac{2.3.2}{6} = 3 \neq 2 \longrightarrow$ D loại.

Câu 22. Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = -2 - \frac{1}{u_n} \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = \frac{-n+1}{n}$. **B.** $u_n = \frac{n+1}{n}$. **C.** $u_n = -\frac{n+1}{n}$. **D.** $u_n = -\frac{n}{n+1}$.

Lời giải. Kiểm tra $u_1 = -2$ ta loại các đáp án A, B. Ta có $u_2 = -2 - \frac{1}{u_1} = -\frac{3}{2}$.

Xét đáp án C: $u_n = -\frac{n+1}{n} \longrightarrow u_2 = -\frac{3}{2} \longrightarrow$ **Chọn C.**

Xét đáp án D. $u_n = -\frac{n}{n+1} \longrightarrow u_2 = -\frac{2}{3} \longrightarrow$ D loại.

Câu 23. Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (-1)^{2n} \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 1+n.$ **B.** $u_n = 1-n.$ **C.** $u_n = 1+(-1)^{2n}.$ **D.** $u_n = n.$

Lời giải. Kiểm tra $u_1 = 1$ ta loại đáp án A, B và C nên **chọn D.**

Câu 24. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = 2(3^n)$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Công thức truy hồi của dãy số đó là:

A. $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_n = 6u_{n-1},\ n > 1 \end{cases}.$ **B.** $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_n = 3u_{n-1},\ n > 1 \end{cases}.$

C. $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_n = 3u_{n-1},\ n > 1 \end{cases}.$ **D.** $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_n = 6u_{n-1},\ n > 1 \end{cases}.$

Lời giải. Vì $u_1 = 2.3^1 = 6$ nên ta loại các đáp án C và D. Ta có $u_2 = 2.3^2 = 18.$

Xét đáp án A: $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_n = 6u_{n-1},\ n > 1 \end{cases} \longrightarrow u_2 = 6u_1 = 6.6 = 36 \longrightarrow$ A loại.

Xét đáp án B: $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_n = 3u_{n-1},\ n > 1 \end{cases} \longrightarrow u_2 = 3u_1 = 3.6 = 18 \longrightarrow$ **chọn B.**

Câu 25. Cho dãy số (a_n), được xác định $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n,\ n \geq 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \dfrac{93}{16}.$ **B.** $a_{10} = \dfrac{3}{512}.$

C. $a_{n+1} + a_n = \dfrac{9}{2^n}.$ **D.** $a_n = \dfrac{3}{2^n}.$

Lời giải. Ta có $a_1 = 3; a_2 = \dfrac{u_1}{2}; a_3 = \dfrac{u_2}{2} = \dfrac{u_1}{2^2}; a_4 = \dfrac{u_3}{2} = \dfrac{u_1}{2^3}, \ldots \longrightarrow u_n = \dfrac{u_1}{2^{n-1}} = \dfrac{3}{2^{n-1}}$ nên suy ra đáp án D sai. **Chọn D.**

Xét đáp án A:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 3\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}\right) = 3.\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{93}{16} \longrightarrow \text{A đúng.}$$

Xét đáp án B: $a_{10} = \dfrac{3}{2^9} = \dfrac{3}{512} \longrightarrow$ B đúng.

Xét đáp án C. $a_{n+1} + a_n = \dfrac{3}{2^n} + \dfrac{3}{2^{n-1}} = \dfrac{3 + 3.2}{2^n} = \dfrac{9}{2^n} \longrightarrow$ C đúng.

Vấn đề 2. Dãy số đơn điệu – Dãy số bị chặn

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho dãy số $(u_n):\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = \dfrac{u_{n-1}+1}{2} \quad \forall n \ge 2 \end{cases}$. Chứng minh rằng dãy (u_n) là dãy giảm và bị chặn.

Lời giải.

Ta có: $u_n - u_{n-1} = \dfrac{1-u_{n-1}}{2}$

Do đó, để chứng minh dãy (u_n) giảm ta chứng minh $u_n > 1\ \forall n \ge 1$

Thật vậy:

Với $n = 1 \Rightarrow u_1 = 2 > 1$

Giả sử $u_k > 1 \Rightarrow u_{k+1} = \dfrac{u_k+1}{2} > \dfrac{1+1}{2} = 1$

Theo nguyên lí quy nạp ta có $u_n > 1\ \forall n \ge 1$

Suy ra $u_n - u_{n-1} < 0 \Leftrightarrow u_n < u_{n-1}\quad \forall n \ge 2$ hay dãy (u_n) giảm

Theo chứng minh trên, ta có: $1 < u_n < u_1 = 2\ \forall n \ge 1$

Vậy dãy (u_n) là dãy bị chặn.

Ví dụ 2. Cho dãy số $(u_n):\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}} \quad \forall n \ge 2 \end{cases}$. Chứng minh rằng dãy (u_n) là dãy tăng và bị chặn

Lời giải.

Ta chứng minh dãy (u_n) là dãy tăng bằng phương pháp quy nạp

* Dễ thấy: $u_1 < u_2 < u_3$.

* Giả sử $u_{k-1} < u_k\ \forall k \ge 2$, ta chứng minh $u_{k+1} < u_k$. Thật vậy:

$u_{k+1} = \sqrt{u_k} + \sqrt{u_{k-1}} > \sqrt{u_{k-1}} + \sqrt{u_{k-2}} = u_k$

Vậy (u_n) là dãy tăng.

Cũng bằng quy nạp ta chứng minh được $u_n < 4\ \forall n$, hơn nữa $u_n > 0$

Nên dãy (u_n) là dãy bị chặn.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Xét tính tăng giảm của các dãy số sau

1. $u_n = \dfrac{3n^2-2n+1}{n+1}$

2. $u_n = n - \sqrt{n^2-1}$

3. $u_n = \dfrac{3^n-1}{2^n}$

4. $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n^2}$

Bài 2 Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n), biết:

1. $u_n = \dfrac{2n-13}{3n-2}$

2. $u_n = \dfrac{n^2+3n+1}{n+1}$

3. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+n+n^2}}$

4. $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$

5. $u_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + ... + \dfrac{1}{n^2}$.

Bài 3. Xét tính bị chặn của các dãy số sau

1. $u_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$

2. $u_n = (-1)^n$

3. $u_n = 3n-1$

4. $u_n = 4 - 3n - n^2$

5. $u_n = \dfrac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$

6. $u_n = \dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+1}}$

Bài 4. Xét tính bị chặn của các dãy số sau

1. $u_n = \dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{2.4} + ... + \dfrac{1}{n.(n+2)}$

2. $u_n = \dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{3.5} + ... + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

3. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \dfrac{u_{n-1}+2}{u_{n-1}+1} \end{cases}, n \ge 2$

Bài 5 Xét tính tăng giảm của các dãy số sau

1. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt[3]{u_n^3+1},\ n \ge 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{4} \quad n \ge 1 \end{cases}$

Bài 6

1. Chứng minh rằng dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_n = \sqrt{2010+\sqrt{2010+...+\sqrt{2010}}} \text{ (n dấu căn)}$$

Là một dãy tăng.

2. Cho dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2 \\ u_n = \sqrt[3]{u_{n-1}} + \sqrt[3]{u_{n-2}}, n \ge 3 \end{cases}$. Chứng minh rằng dãy (u_n) tăng và bị chặn.

3. Cho dãy số $(u_n): u_n = \dfrac{an+2}{2n-1},\ n \ge 1$

a) Khi $a = 4$, hãy tìm 5 số hạng đầu của dãy

b) Tìm a để dãy số đã cho là dãy số tăng.

4. Cho dãy số (u_n): $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = 3u_{n-1} - 2,\ n = 2,3.. \end{cases}$

a) Viết 6 số hạng đầu của dãy

b) Chứng minh $u_n = 3^{n-1} + 1,\ n = 1,2,...$

5. Cho dãy số $u_n = -5.2^{n-1} + 3^n + n + 2$, $n = 1,2,...$

a) Viết 5 số hạng đầu của dãy

b) Chứng minh rằng: $u_n = 2u_{n-1} + 3^{n-1} - n$.

Bài 7

1. Cho dãy số (u_n): $u_n = (1-a)^n + (1+a)^n$,trong đó $a \in (0;1)$ và n là số nguyên dương.

a)Viết công thức truy hồi của dãy số

b)Xét tính đơn điệu của dãy số

2. Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 3u_{n-1} + \dfrac{1}{2u_{n-1}} - 2,\ n \ge 2 \end{cases}$.

a) Viết 4 số hạng đầu của dãy và chứng minh rằng $u_n > 0,\ \forall n$

b) Chứng minh dãy (u_n) là dãy tăng.

3. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi : $\begin{cases} u_0 = 2011 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_n+1},\ \forall n = 1,2,... \end{cases}$

a) Chứng minh rằng dãy (u_n) là dãy giảm

b) Tìm phần nguyên của u_n với $0 \le n \le 1006$.

4. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 2, u_2 = 6 \\ u_{n+2} = u_n + 2u_{n+1},\ \forall n = 1,2,... \end{cases}$

a) Gọi a, b là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 1 = 0$. Chứng minh rằng: $u_n = a^n + b^n$

b) Chứng minh rằng: $u_{n+1}^2 - u_{n+2}u_n = (-1)^{n-1}.8$.

Bài 8 Xét tính tăng giảm và bị chặn của các dãy số sau

1. $(u_n): u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$

2. $(u_n): u_n = n^3 + 2n + 1$

3. $(u_n): \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}, \ \forall n \ge 2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} u_1 = 2, u_2 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}}, \ \forall n \ge 2 \end{cases}$.

Bài 9

1. Cho dãy số $(x_n): \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_n = \dfrac{2n}{(n-1)^2} \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i, \ n = 2,3,... \end{cases}$

Xét dãy số $y_n = x_{n+1} - x_n$. Chứng minh rằng dãy (y_n) là một tăng và bị chặn.

2. Cho dãy số nguyên dương (u_n) thỏa : $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 3 \\ u_{n+2} = 1 + \left[\dfrac{u_{n+1}^2}{u_n}\right], \ n \ge 0 \end{cases}$.

Chứng minh rằng: $u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 = 2^n$ với mọi số tự nhiên n.

3. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 5u_n + \sqrt{24u_n^2 + 1}, \ n = 0,1,.. \end{cases}$.

Chứng minh rằng dãy số (u_n) là dãy số nguyên.

4. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_n = \dfrac{1}{2}\left[(2+\sqrt{5})^n + (2-\sqrt{5})^n\right]$

Chứng minh rằng u_{2n} là số tự nhiên chẵn và u_{2n+1} là số tự nhiên lẻ.

5. Cho hai dãy số $(x_n);(y_n)$ xác định :

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{3} \\ y_1 = \sqrt{3} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x_n = x_{n-1} + \sqrt{1 + x_{n-1}^2} \\ y_n = \dfrac{y_{n-1}}{1 + \sqrt{1 + y_{n-1}^2}} \end{cases}, \ \forall n \ge 2.$$

Chứng minh rằng $2 < x_n y_n < 3, \ \forall n \ge 2$.

6. Cho dãy số số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{1}{3u_n}\right) \end{cases}$.

Chứng minh rằng: $a_n = \dfrac{3}{3u_n^2 - 1}$ là một số chính phương.

ĐÁP ÁN

Bài 1

1. Ta có: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{5n^2 + 10n + 2}{(n+1)(n+2)} > 0$ nên dãy (u_n) là dãy tăng

2. Ta có: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1) + \sqrt{(n+1)^2 - 1}} - \dfrac{1}{n + \sqrt{n^2 - 1}} < 0$

Nên dãy (u_n) giảm.

3. Ta có: $u_{n+1} - u_n = u_{n+1} - u_n = \dfrac{3^n + 1}{2^{n+1}} > 0 \Rightarrow$ dãy (u_n) tăng.

4. Ta có: $u_1 = 0; u_2 = \dfrac{1}{2}; u_3 = \dfrac{2}{9} \Rightarrow \begin{cases} u_2 > u_1 \\ u_3 < u_2 \end{cases} \Rightarrow$ Dãy số không tăng không giảm.

Bài 2

1. Ta có: $u_{n+1}-u_n=\frac{2n-11}{3n+1}-\frac{2n-13}{3n-2}=\frac{34}{(3n+1)(3n-2)}>0$ với mọi $n\ge 1$.

Suy ra $u_{n+1}>u_n\ \ \forall n\ge 1\Rightarrow$ dãy (u_n) là dãy tăng.

Mặt khác: $u_n=\frac{2}{3}-\frac{35}{3(3n-2)}\Rightarrow -11\le u_n<\frac{2}{3}\ \ \forall n\ge 1$

Vậy dãy (u_n) là dãy bị chặn.

2. Ta có: $u_{n+1}-u_n=\frac{(n+1)^2+3(n+1)+1}{n+2}-\frac{n^2+3n+1}{n+1}$

$$=\frac{n^2+5n+5}{n+2}-\frac{n^2+3n+1}{n+1}$$

$$=\frac{(n^2+5n+5)(n+1)-(n^2+3n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{n^2+3n+3}{(n+1)(n+2)}>0\ \forall n\ge 1$$

$\Rightarrow u_{n+1}>u_n\ \forall n\ge 1\Rightarrow$ dãy (u_n) là dãy số tăng.

$u_n>\frac{n^2+2n+1}{n+1}=n+1\ge 2\Rightarrow$ dãy (u_n) bị chặn dưới.

3. Ta có: $u_n>0\ \forall n\ge 1$

$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt{(n+1)^2+(n+1)+1}}=\sqrt{\frac{n^2+n+1}{n^2+3n+3}}<1\ \forall n\in\mathbb{N}^*$

$\Rightarrow u_{n+1}<u_n\ \forall\ge 1\Rightarrow$ dãy (u_n) là dãy số giảm.

Mặt khác: $0<u_n<1\Rightarrow$ dãy (u_n) là dãy bị chặn.

4. Ta có: $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{2^n}{n!}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}.\frac{n!}{2^n}=\frac{2}{n+1}<1\ \forall n\ge 1$

Mà $u_n>0\ \forall n\Rightarrow u_{n+1}<u_n\ \forall n\ge 1\Rightarrow$ dãy (u_n) là dãy số giảm.

Vì $0<u_n\le u_1=2\ \forall n\ge 1\Rightarrow$ dãy (u_n) là dãy bị chặn.

5. Ta có: $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)^2}>0\Rightarrow$ dãy (u_n) là dãy số tăng.

Do $u_n<1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{(n-1)n}=2+\frac{1}{n}$

$\Rightarrow 1<u_n<3\ \forall n\ge 1\Rightarrow$ dãy (u_n) là dãy bị chặn.

Bài 3

1. Ta có $0<u_n<2\ \ \forall n$ nên dãy (u_n) bị chặn

2. Ta có: $-1\le u_n\le 1\Rightarrow (u_n)$ là dãy bị chặn

3. Ta có: $u_n\ge 2\ \ \forall n\Rightarrow (u_n)$ bị chặn dưới; dãy (u_n) không bị chặn trên.

4. Ta có: $u_n=\frac{25}{4}-(n+\frac{3}{2})^2<\frac{25}{4}\Rightarrow (u_n)$ bị chặn trên; dãy (u_n) không bị chặn dưới.

5. Ta có: $1<u_n<2\ \forall n\Rightarrow (u_n)$ bị chặn

6. Ta có: $0<u_n<2\ \forall n\Rightarrow (u_n)$ bị chặn

Bài 4

1. Ta có: $0<u_n<\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n.(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}<1$

Dãy (u_n) bị chặn.

2. Ta có: $u_n = \frac{n}{2n+1} \Rightarrow 0 < u_n < 1$, dãy (u_n) bị chặn.

3. Bằng quy nạp ta chứng minh được $1 < u_n < 2$ nên dãy (u_n) bị chặn.

Bài 5

1. Ta có: $u_{n+1} = \sqrt[3]{u_n^3 + 1} \Rightarrow u_{n+1} > \sqrt[3]{u_n^3} = u_n \ \forall n \Rightarrow$ dãy số tăng

2. Ta có: $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 - 4u_n + 1}{4}$

Bằng quy nạp ta chứng minh được $2 - \sqrt{3} < u_n < 2 \ \forall n$

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n < 0$. Dãy (u_n) giảm.

Bài 6

1. Ta có $u_{n+1}^2 = 2010 + u_n \ \Rightarrow u_{n+1} - u_n = -u_{n+1}^2 + u_{n+1} + 2010$

Bằng quy nạp ta chứng minh được $u_n < \frac{1+\sqrt{8041}}{2} \ \forall n$

Suy ra $u_{n+1} - u_n > 0 \Rightarrow$ dãy (u_n) là dãy tăng.

2. Chứng minh bằng quy nạp : $u_{k+1} = \sqrt[3]{u_k} + \sqrt[3]{u_{k-2}} > \sqrt[3]{u_{k-1}} + \sqrt[3]{u_{k-2}} = u_k$

Ta chứng minh: $0 < u_n < 3$.

3.

a) Với $a = 4$ ta có: $u_n = \frac{4n+2}{2n-1}$. Ta có: 5 số hạng đầu của dãy là

$$u_1 = 6, u_2 = \frac{10}{3}, u_3 = \frac{14}{5}, u_4 = \frac{18}{7}, u_5 = \frac{22}{9}.$$

b) Ta có dãy số (u_n) tăng khi và chỉ khi:

$u_{n+1} - u_n = \frac{-a-4}{(2n+1)(2n-1)} > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow -a-4 > 0 \Leftrightarrow a < -4$.

4.

a) Ta có: $u_1 = 2, u_2 = 4, u_3 = 10, u_4 = 28, u_5 = 82, u_6 = 244$

b) Chứng minh bài toán bằng phương pháp quy nạp hoặc chứng minh bằng cách sau

Ta có: $u_n - 1 = 3(u_{n-1} - 1) = 3^2(u_{n-2} - 1) = ... = 3^{n-1}(u_1 - 1)$

Suy ra: $u_n - 1 = 3^{n-1} \Rightarrow u_n = 3^{n-1} + 1$.

5.

a) Ta có: $u_1 = 1, u_2 = 3, u_3 = 12, u_4 = 47, u_5 = 170$

b) Ta có: $u_{n-1} = -5.2^{n-2} + 3^{n-1} + n + 1$

Nên $2u_{n-1} + 3^n - n = 2\left(-5.2^{n-2} + 3^{n-1} + n + 1\right) + 3^{n-1} - n$

$$= -5.2^{n-1} + 3^n + n + 2 = u_n .$$

Bài 7

1.

a) Ta có: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + a\left[\left(1+a\right)^n - \left(1-a\right)^n\right] \end{cases}$

b) Dãy (u_n) là dãy số tăng.

2.

a) Ta có: $u_1 = 1, u_2 = \frac{3}{2}, u_3 = \frac{17}{6}, u_4 = \frac{227}{34}$.

Ta chứng minh $u_n > 0, \ \forall n$ bằng quy nạp.

Giả sử $u_n > 0$, khi đó: $2u_n + \frac{1}{2u_n} \ge 2\sqrt{2u_n.\frac{1}{2u_n}} = 2$

Nên $u_{n+1} = u_n + \left(2u_n + \frac{1}{2u_n} - 2\right) > u_n > 0$.

b) Theo chứng minh trên ta có: $u_{n+1} > u_n$, $\forall n$ nên dãy (u_n) là dãy tăng.

3.

a) Ta có: $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n}{u_n + 1} < 0, \ \forall n$ nên dãy (u_n) là dãy giảm

b) Ta có: $u_n = u_{n-1} - \frac{u_{n-1}}{u_{n-1} + 1} > u_{n-1} - 1 > ... > u_0 - n$

Suy ra: $u_{n-1} > u_0 - (n-1) = 2012 - n$

Mặt khác:

$$u_n = \left(u_n - u_{n-1}\right) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + ... + (u_1 - u_0) + u_0$$

$$= u_0 - \left(\frac{u_0}{u_0 + 1} + \frac{u_1}{u_1 + 1} + ... + \frac{u_{n-1}}{u_{n-1} + 1}\right)$$

$$= u_0 - n + \left(\frac{1}{u_0 + 1} + \frac{1}{u_1 + 1} + ... + \frac{1}{u_{n-1} + 1}\right)$$

Mà:

$$0 < \frac{1}{u_0 + 1} + \frac{1}{u_1 + 1} + ... + \frac{1}{u_{n-1} + 1} < \frac{n}{u_{n-1} + 1} < \frac{n}{2013 - n} < 1$$

Với mọi $n = \overline{2,1006}$.

Suy ra $u_n < u_0 - n + 1 = 2012 - n$

Do đó: $2011 - n < u_n < 2012 - n \Rightarrow \left[u_n\right] = 2011 - n$

với $n = \overline{2,1006}$.

Vì $u_0 = 2011$ và $u_1 = \frac{2011^2}{2012} = 2010,000497$

nên $\left[u_0\right] = 2011 - 0, \ \left[u_1\right] = 2010 = 2011 - 1$

Vậy $\left[u_n\right] = 2011 - n, \ \forall n = \overline{0,1006}$.

4.

a) Ta chứng minh bài toán bằng quy nạp

Với $n = 1 \Rightarrow u_1 = a + b = 2$

Giả sử $u_n = a^n + b^n, \ \forall n \le k$

Khi đó: $u_{k+1} = 2u_k + u_{k-1} = 2\left(a^k + b^k\right) + a^{k-1} + b^{k-1}$

$$= (a+b)\left(a^k + b^k\right) + a^{k-1} + b^{k-1}$$

$$= a^{k+1} + b^{k+1} + ab(a^{k-1} + b^{k-1}) + a^{k-1} + b^{k-1}$$

$$= a^{k+1} + b^{k+1} - (a^{k-1} + b^{k-1}) + a^{k-1} + b^{k-1}$$

$$= a^{k+1} + b^{k+1}.$$

b) Ta có:

$$u_{n+1}^2 - u_{n+2}u_n = u_{n+1}^2 - \left(2u_{n+1} + u_n\right).u_n$$

$$= u_{n+1}\left(u_{n+1} - 2u_n\right) - u_n^2 = -(u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1})$$

$$= ... = (-1)^{n-1}\left(u_2^2 - u_3u_1\right) = (-1)^n.8.$$

Bài 8

1. Ta có $u_{n+1}-u_n=\frac{n+2}{n+3}-\frac{n+1}{n+2}=\frac{(n+2)^2-(n+3)(n+1)}{(n+2)(n+3)}$

$$=\frac{1}{(n+2)(n+3)}>0,\ \forall n.$$

Mặt khác: $u_n=1-\frac{1}{n+2}\Rightarrow 0<u_n<1,\ \forall n$

Vậy dãy (u_n) là dãy tăng và bị chặn.

2. Ta có: $u_{n+1}-u_n=(n+1)^3+2(n+1)-n^3-2n$

$$=3n^2+3n+3>0,\ \ \forall n$$

Mặt khác: $u_n>1,\ \forall n$ và khi n càng lớn thì u_n càng lớn.

Vậy dãy (u_n) là dãy tăng và bị chặn dưới.

3. Trước hết bằng quy nạp ta chứng minh: $1<u_n\le 2,\ \forall n$

Điều này đúng với $n=1$, giả sử $1<u_n<2$ ta có:

$1<u_{n+1}=\frac{u_n+1}{2}<2$ nên ta có đpcm.

Mà $u_{n+1}-u_n=\frac{1-u_n}{2}<0,\ \forall n$.

Vậy dãy (u_n) là dãy giảm và bị chặn.

4. Trước hết ta chứng minh $1<u_n<4,\ \forall n$

Điều này hiển nhiên đúng với $n=1$.

Giả sử $1<u_n<4$, ta có: $1<u_{n+1}=\sqrt{u_n}+\sqrt{u_{n-1}}<\sqrt{4}+\sqrt{4}=4$

Ta chứng minh (u_n) là dãy tăng

Ta có: $u_1<u_2$, giả sử $u_{n-1}<u_n,\ \forall n\le k$.

Khi đó: $\begin{cases}u_k<u_{k-1}\\ u_{k-1}<u_{k-2}\end{cases}\Rightarrow\sqrt{u_k}+\sqrt{u_{k-1}}<\sqrt{u_{k-1}}+\sqrt{u_{k-2}}\Rightarrow u_{k+1}<u_k$

Vậy dãy (u_n) là dãy tăng và bị chặn.

Bài 9 Ta có: $x_{n+1}=\frac{2(n+1)}{n^2}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{2(n+1)}{n^2}\left(x_n+\sum_{i=1}^{n-1}x_i\right)$

$$=\frac{2(n+1)}{n^2}\left(x_n+\frac{(n-1)^2}{2n}x_n\right)=\frac{(n+1)(n^2+1)}{n^3}x_n.$$

Do đó: $y_n=x_{n+1}-x_n=\frac{n^2+n+1}{n^3}x_n$

- Ta chứng minh dãy (y_n) tăng.

Ta có: $y_{n+1}-y_n=\frac{(n+1)^2+n+2}{(n+1)^3}.\frac{(n+1)(n^2+1)}{n^3}x_n-\frac{n^2+n+1}{n^3}x_n$

$$=\frac{(n^2+3n+3)(n^2+1)-(n^2+n+1)(n^2+2n+1)}{n^3(n+1)^2}x_n$$

$$=\frac{2x_n}{n^3(n+1)^2}>0,\ \forall n=1,2,..$$

- Ta chứng minh dãy (y_n) bị chặn.

Trước hết ta chứng minh: $x_n\le 4(n-1)$ (1) với $\forall n=2,3...$

* Với $n=2$, ta có: $x_2=4x_1=4$ nên (1) đúng với $n=2$

* Giả sử (1) đúng với n, tức là: $x_n \le 4(n-1)$, ta có

$$x_{n+1} = \frac{(n+1)(n^2+1)}{n^3}x_n \le \frac{4(n^4-1)}{n^3} < 4n$$

Nên (1) đúng với $n+1$. Theo nguyên lí quy nạp ta suy ra (1) đúng

Ta có: $y_n = \frac{n^2+n+1}{n^3}x_n \le \frac{4(n-1)(n^2+n+1)}{n^3} = \frac{4(n^3-1)}{n^3} < 4$

Vậy bài toán được chứng minh.

2. Từ cách cho dãy số, ta thấy dãy (u_n) luôn tồn tại và duy nhất.

Xét dãy $(v_n): \begin{cases} v_0 = 1, v_1 = 3 \\ v_{n+2} = 4v_{n+1} - 2v_n,\ n \ge 0 \end{cases}$.

- Ta chứng minh: $v_{n+2}.v_n - v_{n+1}^2 = 2^n$ (1)

Ta có: $v_{n+2}.v_n - v_{n+1}^2 = (4v_{n+1} - 2v_n)v_n - v_{n+1}^2$

$= 4v_{n+1}v_n - v_{n+1}^2 - 2v_n^2 = v_{n+1}\left(4v_n - v_{n+1}\right) - 2v_n^2$

$= v_{n+1}.2v_{n-1} - 2v_n^2 = 2\left(v_{n+1}v_{n-1} - v_n^2\right)$

$= .... = 2^n\left(v_2v_0 - v_1^2\right) = 2^n \Rightarrow$ (1) được chứng minh.

- Ta chứng minh $v_n > 2^n$ (2) bằng quy nạp

Trước hết ta thấy dãy (v_n) là dãy tăng

Với $n=1$ ta thấy (2) đúng

Giả sử $v_n > 2^n$ ta có: $v_{n+1} = 2v_n + 2\left(v_n - v_{n-1}\right) > 2v_n = 2^{n+1}$

Do đó (2) đúng.

- Dựa vào các kết quả trên ta có:

$\frac{v_{n+1}^2}{v_n} = v_{n+2} - \frac{2^n}{v_n} \Rightarrow v_{n+2} - 1 < \frac{v_{n+1}^2}{v_n} < v_{n+2}$

Hay $\frac{v_{n+1}^2}{v_n} - 1 < v_{n+1} - 1 < \frac{v_{n+1}^2}{v_n}$

Do đó: $v_{n+2} - 1 = \left[\frac{v_{n+1}^2}{v_n}\right] \Leftrightarrow v_{n+2} = 1 + \left[\frac{v_{n+1}^2}{v_n}\right]$

Vì tính duy nhất nên ta có: $u_n = v_n,\ \forall n \ge 0$.

Vậy bài toán được chứng minh.

3. Ta có $u_0, u_1 \in \mathbb{Z}$

$\left(u_{n+1} - 5u_n\right)^2 = 24u_n^2 + 1 \Leftrightarrow u_{n+1}^2 - 10u_{n+1}u_n + u_n^2 - 1 = 0$ (1)

Ở (1) thay $n+1$ bởi n ta được: $u_n^2 - 10u_n.u_{n-1} + u_{n-1}^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow u_{n-1}^2 - 10u_{n-1}.u_n + u_n^2 - 1 = 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra u_{n+1}, u_{n-1} là hai nghiệm của phương trình

$$t^2 - 10tu_n + u_n^2 - 1 = 0$$

Theo định lí Viet ta có: $u_{n+1} + u_{n-1} = 10u_n$

Hay $u_{n+1} = 10u_n - u_{n-1}$

Từ đó ta có: $u_n \in \mathbb{Z},\ \forall n$.

4. Đặt $a = 2+\sqrt{5}, b = 2-\sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} a+b=4 \\ ab=-1 \end{cases}$. Khi đó:

$u_n=\frac{1}{2}(a^n+b^n)=\frac{1}{2}\left[(a+b)(a^{n-1}+b^{n-1})-ab(a^{n-2}+b^{n-2})\right]$

$=4.\frac{a^{n-1}+b^{n-1}}{2}+\frac{a^{n-2}+b^{n-2}}{2}=4u_{n-1}+u_{n-2}$.

Ta chứng minh bài toán bằng phương pháp quy nạp

- Với $n=1$ ta có: $u_1=2$ là số chẵn và $u_2=9$ là số lẻ
- Giả sử u_{2k} là số lẻ và u_{2k-1} là số chẵn.

Khi đó: $u_{2k+1}=4u_{2k}+u_{2k-1}$ là số chẵn

$u_{2k+2}=4u_{2k+1}+u_{2k}$ là số lẻ

Từ đó ta có đpcm.

5. Ta có: $x_1=\sqrt{3}=\cot\frac{\pi}{6}\Rightarrow x_2=\cot\frac{\pi}{6}+\sqrt{1+\cot^2\frac{\pi}{6}}=\dfrac{\cos\frac{\pi}{6}+1}{\sin\frac{\pi}{6}}=\cot\frac{\pi}{2.6}$

Bằng quy nạp ta chứng minh được: $x_n=\cot\frac{\pi}{2^{n-1}.6}$.

Tương tự, ta cũng có: $y_n=\tan\frac{\pi}{2^{n-1}.3}$

Đặt $\alpha_n=\frac{\pi}{2^n.3}\Rightarrow x_n=\cot\alpha_n;\ y_n=\tan 2\alpha_n\Rightarrow x_n.y_n=\tan 2\alpha_n.\cot\alpha_n$

Đặt $t=\tan\alpha_n\Rightarrow\tan 2\alpha_n.\cot\alpha_n=\frac{2t}{1-t^2}.\frac{1}{t}=\frac{2}{1-t^2}$.

Vì $n\ge 2\Rightarrow 0<\alpha_n<\frac{\pi}{6}\Rightarrow 0<t<\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\frac{2}{3}\le 1-t^2<1$

$\Rightarrow 2<\frac{2}{1-t^2}<3\Rightarrow 2<x_ny_n<3,\ \forall n\ge 2\Rightarrow$ đpcm.

6. Vì $u_n\in\mathbb{Q}\Rightarrow u_n=\frac{b_n}{c_n}$ với $\begin{cases}b_n,c_n\in\mathbb{Z}\\(b_n,c_n)=1\end{cases}$

Khi đó: $\frac{b_{n+1}}{c_{n+1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{b_n}{c_n}+\frac{c_n}{3b_n}\right)=\frac{3b_n^2+c_n^2}{6b_nc_n}$

Bằng quy nạp ta chứng minh được $\left(3b_n^2+c_n^2,6b_nc_n\right)=3$

Suy ra $\begin{cases}b_{n+1}=3b_n^2+c_n^2\\c_{n+1}=2b_nc_n\end{cases}$

Bằng quy nạp ta chứng minh được: $3b_n^2-c_n^2=3$

Do đó: $a_n=\dfrac{3}{\frac{3b_n^2}{c_n^2}-1}=c_n^2$ (đpcm).

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

Câu 26. Cho các dãy số sau. Dãy số nào là dãy số tăng?

A. $1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\cdots$

B . $1;\ -\frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ -\frac{1}{8};\ \frac{1}{16};\cdots$

C. $1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9;\cdots$

D. $1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{16};\cdots$

Lời giải. Xét đáp án A: 1; 1; 1; 1; 1; 1;$\cdots$ đây là dãy hằng nên không tăng không giảm.

Xét đáp án B: $1;\ -\frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ -\frac{1}{8};\ \frac{1}{16};\cdots \longrightarrow u_1 > u_2 < u_3 \longrightarrow$ loại B.

Xét đáp án C: $1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9;\cdots \longrightarrow u_n < u_{n+1},\ n \in \mathbb{N}^* \longrightarrow$ **Chọn C.**

Xét đáp án D: $1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{16};\cdots \longrightarrow u_1 > u_2 > u_3 \ldots > u_n > \ldots \longrightarrow$ loại D.

Câu 27. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số tăng?

A. $u_n = \frac{1}{2^n}$. **B.** $u_n = \frac{1}{n}$. **C.** $u_n = \frac{n+5}{3n+1}$. **D.** $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$.

Lời giải. Vì $2^n; n$ là các dãy dương và tăng nên $\frac{1}{2^n}; \frac{1}{n}$ là các dãy giảm, do đó loại các đáp án A và B.

Xét đáp án C: $u_n = \frac{n+5}{3n+1} \longrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{3}{2} \\ u_2 = \frac{7}{6} \end{cases} \longrightarrow u_1 > u_2 \longrightarrow$ loại C.

Xét đáp án D: $u_n = \frac{2n-1}{n+1} = 2 - \frac{3}{n+1} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 3\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) > 0 \longrightarrow$ **Chọn D.**

Câu 28. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số tăng?

A. $u_n = \frac{2}{3^n}$. **B.** $u_n = \frac{3}{n}$. **C.** $u_n = 2^n$. **D.** $u_n = (-2)^n$.

Lời giải. Xét đáp án C: $u_n = 2^n \longrightarrow u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - 2^n = 2^n > 0 \longrightarrow$ **Chọn C.**

Vì $2^n; n$ là các dãy dương và tăng nên $\frac{1}{2^n}; \frac{1}{n}$ là các dãy giảm, do đó loại các đáp án A và B.

Xét đáp án D: $u_n = (-2)^n \longrightarrow \begin{cases} u_2 = 4 \\ u_3 = -8 \end{cases} \longrightarrow u_2 > u_3 \longrightarrow$ loại D.

Câu 29. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số giảm?

A. $u_n = \frac{1}{2^n}$. **B.** $u_n = \frac{3n-1}{n+1}$. **C.** $u_n = n^2$. **D.** $u_n = \sqrt{n+2}$.

Lời giải. Vì 2^n là dãy dương và tăng nên $\frac{1}{2^n}$ là dãy giảm $\longrightarrow$ **Chọn A.**

Xét B: $u_n = \frac{3n-1}{n+1} \longrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = \frac{5}{3} \end{cases} \longrightarrow u_1 < u_2 \longrightarrow$ loại B. Hoặc

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3n+2}{n+2} - \frac{3n-1}{n+1} = \frac{4}{(n+1)(n+2)} > 0 \text{ nên } (u_n) \text{ là dãy tăng.}$$

Xét C: $u_n = n^2 \longrightarrow u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1 > 0 \longrightarrow$ loại C.

Xét D: $u_n = \sqrt{n+2} \longrightarrow u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+2} = \dfrac{1}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}} > 0 \longrightarrow$ loại D.

Câu 30. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số giảm?

A. $u_n = \sin n.$ **B.** $u_n = \dfrac{n^2+1}{n}.$

C. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$ **D.** $u_n = (-1)^n.(2^n+1).$

Lời giải. A. $u_n = \sin n \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 2\cos\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\sin\dfrac{1}{2}$ có thể dương hoặc âm phụ thuộc n nên đáp án A sai. Hoặc dễ thấy $\sin n$ có dấu thay đổi trên $\mathbb{N}^*$ nên dãy $\sin n$ không tăng, không giảm.

B. $u_n = \dfrac{n^2+1}{n} = n + \dfrac{1}{n} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 1 + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n^2+n-1}{n(n+1)} > 0$ nên dãy đã cho tăng nên B sai.

C. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$, dãy $\sqrt{n} + \sqrt{n-1} > 0$ là dãy tăng nên suy ra u_n giảm. **Chọn C.**

D. $u_n = (-1)^n(2^n+1)$ là dãy thay dấu nên không tăng không giảm.

Cách trắc nghiệm.

A. $u_n = \sin n$ có dấu thay đổi trên $\mathbb{N}^*$ nên dãy này không tăng không giảm.

B. $u_n = \dfrac{n^2+1}{n}$, ta có $\begin{cases} n=1 \to u_1 = 2 \\ n=2 \to u_2 = \dfrac{5}{2} \end{cases} \longrightarrow u_1 < u_2 \longrightarrow u_n = \dfrac{n^2+1}{n}$ không giảm.

C. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$, ta có $\begin{cases} n=1 \to u_1 = 1 \\ n=2 \to u_2 = \sqrt{2}-1 \end{cases} \longrightarrow u_1 > u_2$ nên dự đoán dãy này giảm.

D. $u_n = (-1)^n(2^n+1)$ là dãy thay dấu nên không tăng không giảm.

Cách CASIO.

- Các dãy $\sin n; (-1)^n(2^n+1)$ có dấu thay đổi trên $\mathbb{N}^*$ nên các dãy này không tăng không giảm nên loại các đáp án A, D.
- Còn lại các đáp án B, C ta chỉ cần kiểm tra một đáp án bằng chức năng TABLE.

Chẳng hạn kiểm tra đáp án B, ta vào chức năng TABLE nhập $F(X) = \dfrac{X^2+1}{X}$ với thiết lập $\text{Start} = 1,\ \text{End} = 10,\ \text{Step} = 1.$

Nếu thấy cột $F(X)$ các giá trị tăng thì loại B và chọn C, nếu ngược lại nếu thấy cột $F(X)$ các giá trị giảm dần thị chọn B và loại C.

Câu 31. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số $u_n = \frac{1}{n} - 2$ là dãy tăng. **B.** Dãy số $u_n = (-1)^n(2^n+1)$ là dãy giảm.

C. Dãu số $u_n = \frac{n-1}{n+1}$ là dãy giảm. **D.** Dãy số $u_n = 2n + \cos\frac{1}{n}$ là dãy tăng.

Lời giải. Xét đáp án A: $u_n = \frac{1}{n} - 2 \longrightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} < 0 \longrightarrow$ loại A.

Xét đáp án B: $u_n = (-1)^n(2^n+1)$ là dãy có dấu thay đổi nên không giảm nên loại B.

Xét đáp án C: $u_n = \frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1} \longrightarrow u_{n+1} - u_n = 2\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) > 0 \longrightarrow$ loại C.

Xét đáp án D: $u_n = 2n + \cos\frac{1}{n} \longrightarrow u_{n+1} - u_n = \left(2 - \cos\frac{1}{n+1}\right) + \cos\frac{1}{n+2} > 0$ nên **Chọn D.**

Câu 32. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Dãy số $u_n = \frac{1-n}{\sqrt{n}}$ là dãy giảm. **B.** Dãy số $u_n = 2n^2 - 5$ là dãy tăng.

C. Dãy số $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ là dãy giảm. **D.** Dãy số $u_n = n + \sin^2 n$ là dãy tăng.

Lời giải. Xét A: $u_n = \frac{1-n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} \longrightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n} - \sqrt{n+1} < 0$ nên dãy (u_n) là dãy giảm nên C đúng.

Xét đáp án B: $u_n = 2n^2 - 5$ là dãy tăng vì n^2 là dãy tăng nên B đúng. Hoặc

$$u_{n+1} - u_n = 2(2n+1) > 0 \text{ nên } (u_n) \text{ là dãy tăng.}$$

Xét đáp án C: $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n > 0 \longrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+2}{n+1}.\left(\frac{n+2}{n}\right)^n > 1 \longrightarrow (u_n)$ là dãy tăng nên **Chọn C.**

Xét đáp án D: $u_n = n + \sin^2 n \longrightarrow u_{n+1} - u_n = \left(1 - \sin^2(n+1)\right) + \sin^2 n > 0$ nên D đúng.

Câu 33. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \frac{3n-1}{3n+1}$. Dãy số (u_n) bị chặn trên bởi số nào dưới đây?

A. $\frac{1}{3}$. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 0.

Lời giải. Ta có $u_n = \frac{3n-1}{3n+1} = 1 - \frac{2}{3n+1} < 1$. Mặt khác: $u_2 = \frac{5}{7} > \frac{1}{2} > \frac{1}{2} > 0$ nên suy ra dãy (u_n) bị chặn trên bởi số 1. **Chọn B.**

Câu 34. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào bị chặn trên?

A. $u_n = n^2$. **B.** $u_n = 2^n$. **C.** $u_n = \frac{1}{n}$. **D.** $u_n = \sqrt{n+1}$.

Lời giải. Các dãy số n^2; 2^n; $n+1$ là các dãy tăng đến vô hạn khi n tăng lên vô hạn nên chúng không bị chặn trên (có thể dùng chức năng TABLE của MTCT để kiểm tra). **Chọn C.**

Nhận xét: $u_n = \frac{1}{n} \le 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy (u_n) bị chặn trên bởi 1.

Câu 35. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \cos n + \sin n$. Dãy số (u_n) bị chặn trên bởi số nào dưới đây?

A. 0. **B.** 1.

C. $\sqrt{2}$. **D.** Không bị chặn trên.

Lời giải. Ta có $u_n \xrightarrow{MTCT} u_1 = \sin 1 + \cos 1 > 1 > 0$ nên loại các đáp án A và B (dùng TABLE của MTCT để kiểm tra, chỉ cần 1 số hạn nào đó của dãy số lớn hơn α thì dãy số đó không thể bị chặn trên bởi α.)

Ta có $u_n = \cos n + \sin n = \sqrt{2}\sin\left(n + \frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2} \longrightarrow$ **Chọn C.**

Câu 36. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \sin n - \cos n$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới bởi số nào dưới đây?

A. 0. **B.** -1.

C. $-\sqrt{2}$. **D.** Không bị chặn dưới.

Lời giải. $u_n \xrightarrow{MTCT} u_5 = \sin 5 - \cos 5 < -1 < 0 \longrightarrow$ loại A và B (dùng TABLE của MTCT để kiểm tra, chỉ cần có một số hạng nào đó của dãy số nhỏ hơn α thì dãy số đó không thể bị chặn dưới với số α.)

Ta có $u_n = \sqrt{2}\sin\left(n - \frac{\pi}{4}\right) \ge -\sqrt{2} \longrightarrow$ **Chọn C.**

Câu 37. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \sqrt{3}\cos n - \sin n$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và chặn trên lần lượt bởi các số m và M nào dưới đây?

A. $m = -2;\ M = 2$. **B.** $m = -\frac{1}{2};\ M = \sqrt{3} + 1$.

C. $m = -\sqrt{3} + 1;\ M = \sqrt{3} - 1$. **D.** $m = -\frac{1}{2};\ M = \frac{1}{2}$.

Lời giải. $u_n \xrightarrow{MTCT(TABLE)} u_1 > \sqrt{3} - 1 > \frac{1}{2} \longrightarrow$ loại C và D.

$u_n \xrightarrow{MTCT(TABLE)} u_4 < -\frac{1}{2} \longrightarrow$ loại B. Vậy **Chọn A.**

Nhận xét: $u_n = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin n - \frac{1}{2}\cos n\right) = 2\sin\left(n - \frac{\pi}{6}\right) \longrightarrow -2 \le u_n \le 2$.

Câu 38. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = (-1)^n . 5^{2n+5}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) bị chặn trên và không bị chặn dưới.

B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.

C. Dãy số (u_n) bị chặn.

D. Dãy số (u_n) không bị chặn.

Lời giải. Nếu n chẵn thì $u_n = 5^{2n+1} > 0$ tăng lên vô hạn (dương vô cùng) khi n tăng lên vô hạn nên dãy (u_n) không bị chặn trên.

Nếu n lẻ thì $u_n = -5^{2n+1} < 0$ giảm xuống vô hạn (âm vô cùng) khi n tăng lên vô hạn nên dãy (u_n) không bị chặn dưới.

Vậy dãy số đã cho không bị chặn. **Chọn D.**

Câu 39. Cho dãy số (u_n), với $u_n = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.5} + ... + \frac{1}{n(n+3)}, \forall n = 1;\ 2;\ 3\cdots$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) bị chặn trên và không bị chặn dưới.

B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.

C. Dãy số (u_n) bị chặn.

D. Dãy số (u_n) không bị chặn.

Lời giải. Ta có $u_n > 0 \longrightarrow (u_n)$ bị chặn dưới bởi 0. Mặt khác $\frac{1}{k(k+3)} < \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\ (k \in \mathbb{N}^*)$ nên suy ra:

$$u_n < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

nên dãy (u_n) bị chặn trên, do đó dãy (u_n) bị chặn. **Chọn C.**

Câu 40. Cho dãy số (u_n), với $u_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}, \forall n = 2;\ 3;\ 4;\cdots$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) bị chặn trên và không bị chặn dưới.

B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.

C. Dãy số (u_n) bị chặn.

D. Dãy số (u_n) không bị chặn.

Lời giải. Ta có $u_n > 0 \longrightarrow (u_n)$ bị chặn dưới bởi 0. Mặt khác $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\ (k \in \mathbb{N}^*, k \geq 2)$ nên suy ra:

$$u_n < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

nên dãy (u_n) bị chặn trên, do đó dãy (u_n) bị chặn. **Chọn C.**

Câu 41. Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy số nào là dãy số bị chặn?

A. $u_n = \sqrt{n^2 + 1}$. **B.** $u_n = n + \frac{1}{n}$. **C.** $u_n = 2^n + 1$. **D.** $u_n = \frac{n}{n+1}$.

Lời giải. Các dãy số $n^2; n; 2^n$ dương và tăng lên vô hạn (dương vô cùng) khi n tăng lên vô hạn, nên các dãy $\sqrt{n^2+1};\ n+\frac{1}{n};\ 2^n+1$ cũng tăng lên vô hạn (dương vô cùng), suy ra các dãy này không bị chặn trên, do đó chúng không bị chặn. **Chọn D.**

Nhận xét: $0<u_n=\frac{n}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}<1.$

Câu 42. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào bị chặn?

A. $u_n=\frac{1}{2^n}.$ **B.** $u_n=3^n.$ **C.** $u_n=\sqrt{n+1}.$ **D.** $u_n=n^2.$

Lời giải. Các dãy số $n^2; n; 3^n$ dương và tăng lên vô hạn (dương vô cùng) khi n tăng lên vô hạn nên các dãy $n^2; \sqrt{n+1}; 3^n$ cũng tăng lên vô hạn (dương vô cùng), suy ra các dãy này không bị chặn trên, do đó chúng không bị chặn. **Chọn A.**

Nhận xét: $0<u_n=\frac{1}{2^n}\le\frac{1}{2}.$

Câu 43. Cho dãy số (u_n), xác định bởi $\begin{cases}u_1=6\\u_{n+1}=\sqrt{6+u_n},\ \forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\sqrt{6}\le u_n<\frac{5}{2}.$ **B.** $\sqrt{6}\le u_n<3.$

C. $\sqrt{6}\le u_n<2.$ **D.** $\sqrt{6}\le u_n\le 2\sqrt{3}.$

Lời giải. Ta có $u_2=\sqrt{12}>3>\frac{5}{2}>2$ nên loại các đáp án A, B, C. **Chọn D.**

Nhận xét: Ta có

$$\begin{cases}u_1=6\\u_{n+1}=\sqrt{6+u_n}\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}u_1=6\\u_{n+1}\ge 0\end{cases}\longrightarrow u_n\ge 0\longrightarrow\begin{cases}u_1=6\\u_{n+1}=\sqrt{6+u_n}\ge\sqrt{6}\end{cases}\longrightarrow u_n\ge\sqrt{6}.$$

Ta chứng minh quy nạp $u_n\le 2\sqrt{3}.$

$$u_1\le 2\sqrt{3}; u_k\le 2\sqrt{3}\longrightarrow u_{k+1}=\sqrt{6+u_{k+1}}\le\sqrt{6+2\sqrt{3}}<\sqrt{6+6}=2\sqrt{3}.$$

Câu 44. Cho dãy số (u_n), với $u_n=\sin\frac{\pi}{n+1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Số hạng thứ $n+1$ của dãy là $u_{n+1}=\sin\frac{\pi}{n+1}.$

B. Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn.

C. Dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

D. Dãy số (u_n) không tăng không giảm.

Lời giải. $u_n = \sin\frac{\pi}{n+1} \longrightarrow u_{n+1} = \sin\frac{\pi}{(n+1)+1} = \sin\frac{\pi}{n+2} \longrightarrow$ A sai.

$u_n = \sin\frac{\pi}{n+1} \longrightarrow -1 \le u_n \le 1 \longrightarrow$ B đúng. **Chọn B.**

$u_{n+1} - u_n = \sin\frac{\pi}{n+2} - \sin\frac{\pi}{n+1} < 0 \left(0 < \frac{\pi}{n+2} < \frac{\pi}{n+1} \le \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow$ C, D sai.

Câu 45. Cho dãy số (u_n), với $u_n = (-1)^n$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) là dãy số tăng.

B. Dãy số (u_n) là dãy số giảm.

C. Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn.

D. Dãy số (u_n) là dãy số không bị chặn.

Lời giải. $u_n = (-1)^n$ là dãy thay dấu nên không tăng, không giảm $\longrightarrow$ A, B sai.

Tập giá trị của dãy $u_n = (-1)^n$ là $\{-1;1\} \longrightarrow -1 \le u_n \le 1 \longrightarrow$ C đúng. **Chọn C.**

3. CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

A. LÝ THUYẾT

1. Cấp số cộng

1.1. Định nghĩa: Dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n + d \end{cases}, n \in N^*$ gọi là cấp số cộng; d gọi là công sai.

2.1. Các tính chất:

- Số hạng thứ n được cho bởi công thức: $u_n = u_1 + (n-1)d$.
- Ba số hạng u_k, u_{k+1}, u_{k+2} là ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng khi và chỉ khi $u_{k+1} = \frac{1}{2}(u_k + u_{k+2})$.
- Tổng n số hạng đầu tiên S_n được xác định bởi công thức :

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = \frac{n}{2}\left[2u_1 + (n-1)d\right].$$

2. Cấp số nhân

1.2. Định nghĩa: Dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n.q \end{cases}, n \in N^*$ gọi là cấp số cộng; q gọi là công bội.

2.2. Các tính chất:

- Số hạng thứ n được cho bởi công thức: $u_n = u_1 q^{n-1}$.
- Ba số hạng u_k, u_{k+1}, u_{k+2} là ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng khi và chỉ khi $u_{k+1}^2 = u_k.u_{k+2}$.
- Tổng n số hạng đầu tiên S_n được xác định bởi công thức :

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = u_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Vấn đề 1. Xác định cấp số và xác yếu tố của cấp số

Phương pháp:

- Dãy số (u_n) là một cấp số cộng $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = d$ không phụ thuộc vào n và d là công sai.
- Dãy số (u_n) là một cấp số nhân $\Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ không phụ thuộc vào n và q là công bội.
- Ba số a, b, c theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow a + c = 2b$.
- Ba số a, b, c theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân $\Leftrightarrow ac = b^2$.
- Để xác định một cấp số cộng, ta cần xác định số hạng đầu và công sai. Do đó, ta thường biểu diễn giả thiết của bài toán qua u_1 và d.
- Để xác định một cấp số nhân, ta cần xác định số hạng đầu và công bội. Do đó, ta thường biểu diễn giả thiết của bài toán qua u_1 và q.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng biết tổng của chúng bằng 20 và tổng các bình phương của chúng bằng 120.

Chú ý:
* Cách gọi các số hạng của cấp số cộng như trên giúp ta giải quyết bài toán gọn hơn.
* Nếu số hạng cấp số cộng là lẻ thì gọi công sai $d = x$, là chẵn thì gọi công sai $d = 2x$ rồi viết các số hạng cấp số dưới dạng đối xứng.
* Nếu cấp số cộng (a_n) thỏa: $\begin{cases} a_1 + a_2 + ... + a_n = p \\ a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = s^2 \end{cases}$ thì:

$$a_1 = \frac{1}{n}\left[p - \frac{n(n-1)}{2}.d\right] \text{ và } d = \pm\sqrt{\frac{12\left(ns^2 - p^2\right)}{n^2\left(n^2-1\right)}}.$$

Ví dụ 2. Cho CSC (u_n) thỏa : $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$

1. Xác định công sai và công thức tổng quát của cấp số;

2. Tính $S = u_1 + u_4 + u_7 + ... + u_{2011}$.

Ví dụ 3. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa: $\begin{cases} u_5 + 3u_3 - u_2 = -21 \\ 3u_7 - 2u_4 = -34 \end{cases}$.

1. Tính số hạng thứ 100 của cấp số ;

2. Tính tổng 15 số hạng đầu của cấp số ;

3. Tính $S = u_4 + u_5 + ... + u_{30}$.

Ví dụ 4. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$

1. Xác định cấp số cộng

2. Tính tổng $S = u_5 + u_7 + \ldots + u_{2011}$

Ví dụ 5. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1$ và tổng 100 số hạng đầu bằng 24850. Tính

$S = \frac{1}{u_1u_2} + \frac{1}{u_2u_3} + ... + \frac{1}{u_{49}u_{50}}$

Ví dụ 6. Cho cấp số nhân (u_n) có các số hạng khác không, tìm u_1 biết:

1. $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 15 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 85 \end{cases}$

2. $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 11 \\ u_1 + u_5 = \frac{82}{11} \end{cases}$

Ví dụ 7. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa: $\begin{cases} u_4 = \frac{2}{27} \\ u_3 = 243u_8 \end{cases}$.

1. Viết năm số hạng đầu của cấp số;

2. Tính tổng 10 số hạng đầu của cấp số;

3. Số $\frac{2}{6561}$ là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số ?

1I. BÀI TẬP TỰ LUẬN TỰ LUYỆN

Bài 1 Dãy số (u_n) có phải là cấp số cộng không ? Nếu phải hãy xác định số công sai ? Biết:

1. $u_n = 2n + 3$ **2.** $u_n = -3n + 1$ **3.** $u_n = n^2 + 1$ **4.** $u_n = \frac{2}{n}$

Bài 2 . Dãy số (u_n) có phải là cấp số nhân không ? Nếu phải hãy xác định số công bội ? Biết:

1. $u_n = 2n$ **2.** $u_n = 4.3^n$ **3.** $u_n = \dfrac{2}{n}$.

Bài 3. Xét xem các dãy số sau có phải là cấp số cộng hay không? Nếu phải hãy xác định công sai.

1. $u_n = 3n+1$ **2.** $u_n = 4-5n$ **3.** $u_n = \dfrac{2n+3}{5}$ **4.** $u_n = \dfrac{n+1}{n}$ **5.** $u_n = \dfrac{n}{2^n}$ **6.** $u_n = n^2+1$

Bài 4 Xét xem các dãy số sau có phải là cấp số nhân hay không? Nếu phải hãy xác định công bội.

1. $u_n = 2^n$ **2.** $u_n = -\dfrac{3^{n-1}}{5}$ **3.** $u_n = 3n-1$ **4.** $u_n = \dfrac{2^n-1}{3}$ **5.** $u_n = n^3$.

Bài 5.

1. Tam giác ABC có ba góc A,B,C theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng và $C = 5A$. Xác định số đo các góc A,B,C.

2. Cho tam giác ABC biết ba góc tam giác lập thành cấp số cộng và $\sin A + \sin B + \sin C = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$ tính các góc của tam giác

Bài 6. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 3^{\frac{n}{2}+1}$

1. Chứng minh dãy số (u_n) là cấp số nhân

2. Tính tổng $S = u_2 + u_4 + u_6 + \ldots + u_{20}$

3. Số 19683 là số hạng thứ mấy của dãy số.

Bài 7.

1. Cho cấp số nhân có 7 số hạng, số hạng thứ tư bằng 6 và số hạng thứ 7 gấp 243 lần số hạng thứ hai. Hãy tìm số hạng còn lại của CSN đó.

2. Tìm ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng biết tổng của chúng bằng -9 và tổng các bình phương của chúng bằng 29.

3. Cho bốn số nguyên dương, trong đó ba số đầu lập thành một cấp số cộng, ba số sau lập thành cấp số nhân. Biết tổng số hạng đầu và cuối là 37, tổng hai số hạng giữa là 36, tìm bốn số đó.

Bài 8.

1. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2.u_7 = 75 \end{cases}$. Tìm u_1, d?

2. Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d > 0$; $\begin{cases} u_{31} + u_{34} = 11 \\ u_{31}^2 + u_{34}^2 = 101 \end{cases}$. Hãy tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng đó.

3. Gọi $S_1;S_2;S_3$ là tổng $n_1;n_2;n_3$ số hạng đầu của một cấp số cộng. Chứng minh rằng:

$$\frac{S_1}{n_1}(n_2-n_3) + \frac{S_2}{n_2}(n_3-n_1) + \frac{S_3}{n_3}(n_1-n_2) = 0$$

Bài 9. Cho CSN (u_n) thỏa: $\begin{cases} u_1+u_2+u_3+u_4+u_5 = 11 \\ u_1 + u_5 = \dfrac{82}{11} \end{cases}$

1. Tìm công bội và số hạng tổng quát của cấp số

2. Tính tổng S_{2011}

3. Trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$ có bao nhiêu số hạng của cấp số.

Bài 10.

1. Cho dãy số $(x_n): x_n = \dfrac{1}{n}$, $n = 1,2,3...$. Chứng minh rằng luôn tồn tại một CSC gồm 2011 số hạng mà mỗi số hạng đều thuộc dãy số trên.

Vấn đề 2. Chứng minh tính chất của cấp số

Phương pháp:

- Sử dụng công thức tổng quát của cấp số, chuyển các đại lượng qua số hạng đầu và công sai, công bội.
- Sử dụng tính chất của cấp số:

i) a,b,c theo thứ tự đó lập thành CSC $\Leftrightarrow a+c = 2b$

ii) a,b,c theo thứ tự đó lập thành CSN $\Leftrightarrow ac = b^2$

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Chứng minh rằng các số:

1. $1,\sqrt{3},3$ không thể cùng thuộc một CSC;

2. $2,3,5$ không thể cùng thuộc một CSN.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng dãy số (u_n) là:

1. CSC khi và chỉ khi $u_n = an + b$ **2.** CSN khi và chỉ khi $u_n = a.q^n$.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng :

1. Nếu phương trình $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ có ba nghiệm lập thành CSC thì $9ab = 2a^3 + 27c$

2. Nếu phương trình $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ có ba nghiệm lập thành CSN thì $c(ca^3 - b^3) = 0$

Ví dụ 4. Chứng minh rằng với mọi cách chia tập $X = \{1,2,3,...,9\}$ thành hai tập con rời nhau luôn có một tập chứa ba số lập thành cấp số cộng.

Ví dụ 5. Dãy số (xn) thỏa mãn điều kiện: $\left|x_{n+m} - x_m - x_n\right| < \dfrac{1}{m+n}$ $\forall m,n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng: (xn) là một cấp số cộng.

1I. BÀI TẬP TỰ LUẬN TỰ LUYỆN

Bài 1

1. Cho ba số a,b,c lập thành cấp số cộng. Chứng minh rằng : $a^2 + 2bc = c^2 + 2ab$.

2. Cho $a,b,c > 0$ lập thành cấp sô cộng.Chứng minh rằng : $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \dfrac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$.

3. Cho (u_n) là cấp số cộng. Chứng minh rằng : $u_n = \dfrac{1}{2}\left(u_{n-k} + u_{n+k}\right)$, $1 \le k \le n-1$

Bài 2

1. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng $\tan\dfrac{A}{2};\tan\dfrac{B}{2};\ \tan\dfrac{C}{2}$ lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow \cos A;\cos B;\cos C$ lập thành cấp số cộng.

2. Cho tam giác ABC.Chứng minh rằng $\cot\dfrac{A}{2};\cot\dfrac{B}{2};\cot\dfrac{C}{2}$ lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow \sin A;\sin B;\sin C$ lập thành cấp số cộng.

Bài 3 Cho a,b,c lập thành cấp số nhân . .Chứng minh rằng :

1. $(a+b+c)(a-b+c) = a^2 + b^2 + c^2$

2. $\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right) = (ab+bc)^2$

3. $(ab+bc+ca)^3 = abc(a+b+c)^3$

4. $\left(a^n+b^n+c^n\right)\left(a^n-b^n+c^n\right) = a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}$; $n \in \mathbb{N}^*$

Bài 4 Cho (u_n) là cấp số nhân .Chứng minh rằng :

1. $a_1a_n = a_k.a_{n-k+1}$, $k = \overline{1;n}$ **2.** $S_n\left(S_{3n} - S_{2n}\right) = \left(S_{2n} - S_n\right)^2$.

Bài 5

1. Điều cần và đủ để ba số khác không a,b,c là ba số hạng của một CSN là tồn tại ba số nguyên khác không p,t,r sao cho $\begin{cases} p+t+r=0 \\ a^p.b^t.c^r = 1 \end{cases}$.

2. Cho cấp số cộng (a_n) với các số hạng khác không và công sai khác không.Chứng minh rằng:

$\dfrac{1}{a_1a_2} + \dfrac{1}{a_2a_3} + ... + \dfrac{1}{a_{n-1}a_n} = \dfrac{n-1}{a_1a_n}$.

3. Cho bốn số thực $a_1;a_2;a_3;a_4$ .Biết rằng : $\begin{cases} \frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}=\frac{2}{a_1a_3} \\ \frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}=\frac{3}{a_1a_4} \end{cases}$

Chứng minh rằng : $a_1;a_2;a_3;a_4$ lập thành cấp số cộng.

4. Cho a,b,c lần lượt là ba số hạng thứ m,n,p của một cấp số cộng. Chứng minh rằng :
$a.(n-p)+b.(p-m)+c.(m-n)=0$.

5. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để ba số a,b,c là ba số hạng của một CSC là tồn tại ba số nguyên khác không p,q,r thỏa: $\begin{cases} pa+qb+rc=0 \\ p+q+r=0 \end{cases}$.

6.Cho CSC (u_n) thỏa $S_m=S_n$ ($m\neq n$). Chứng minh $S_{m+n}=0$.

7. Chứng minh rằng nếu ba cạnh của tam giác lập thành CSN thì công bội của CSN đó nằm trong khoảng $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Bài 6

1. Chứng minh ba số $a,b,c>0$ là 3 số hạng liên tiếp của cấp số cộng khi và chỉ khi 3 số
$a^2+ab+b^2;c^2+ca+a^2;b^2+bc+c^2$ cũng là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng.

2. Cho (u_n) là cấp số nhân. Kí hiệu $S=u_1+u_2+...+u_n$;
$T=\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+...+\frac{1}{u_n}$; $P=u_1u_2...u_n$. Hãy tính P theo S,T và n.

Bài 7 Cho hai số tự nhiên n,k thỏa $k+3\leq n$.

1. Chứng minh rằng tồn tại không quá hai giá trị của k sao cho C_n^k, C_n^{k+1} và C_n^{k+2} là ba số hạng liên tiếp của một CSC.

2. Chứng minh rằng không tồn tại k để C_n^k, C_n^{k+1}, C_n^{k+2} và C_n^{k+3} là bốn số hạng liên tiếp của một CSC.

Bài 8

1. Cho (u_n) là CSC. Chứng minh rằng: $\sum_{k=0}^{n}\frac{u_{k+1}}{C_n^k}=\frac{u_1+u_{n+1}}{2}.\frac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k}$

2. Cho k là một số nguyên dương cho trước. Giả sử $s_1,s_2,s_3,...$ là một dãy tăng nghặt các số nguyên dương sao cho các dãy con $s_{s_1},s_{s_2},s_{s_3},...$ và $s_{s_1+k},s_{s_2+k},s_{s_3+k},...$ đều là cấp số cộng. Chứng minh rằng $s_1,s_2,s_3,...$ cũng là một cấp số cộng

Vấn đề 3. Tìm điều kiện để dãy số lập thành cấp số

Phương pháp:

- a,b,c theo thứ tự đó lập thành CSC $\Leftrightarrow a+c=2b$
- a,b,c theo thứ tự đó lập thành CSN $\Leftrightarrow ac=b^2$.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tìm x biết :

1. $x^2+1,x-2,1-3x$ lập thành cấp số cộng ;

2. $1,x^2,6-x^2$ lập thành cấp số nhân.

Ví dụ 2. Cho các số $5x-y$, $2x+3y$, $x+2y$ lập thành cấp số cộng ; các số $(y+1)^2,xy+1,(x-1)^2$ lập thành cấp số nhân.Tính x,y

1I. BÀI TẬP TỰ LUẬN TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm x để các số sau lập thành cấp số cộng

1. $1;x;x^3$ **2.** $1;\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right);4\sin x$

Bài 2. Tìm x,y biết:

1. Các số $x+5y,5x+2y,8x+y$ lập thành cấp số cộng và các số $(y-1)^2,xy-1,(x+1)^2$ lập thành cấp số nhân.

2. Các số $x+6y,5x+2y,8x+y$ lập thành cấp số cộng và các số $x+\frac{5}{3}y,y-1,2x-3y$ lập thành cấp số nhân.

Bài 3. Xác định a,b để phương trình $x^3+ax+b=0$ có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

Bài 4 Tìm m để phương trình:

1. $mx^4-2(m-1)x^2+m-1=0$ có bốn nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

2. $x^3-3mx^2+4mx+m-2=0$ có ba nghiệm lập thành cấp số nhân

Bài 5 Xác định m để:

1. Phương trình $x^3-3x^2-9x+m=0$ có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

2. Phương trình $x^4-2(m+1)x^2+2m+1=0$ (1) có bốn nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

3. Phương trình $x^3+2x^2+(m+1)x+2(m+1)=0$ có ba nghiệm lập thành cấp số nhân.

1II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm liên quan đến cấp số cộng

Câu 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số cộng?

A. $1;-3;-7;-11;-15;\cdots$ **B.** $1;-3;-6;-9;-12;\cdots$

C. $1;-2;-4;-6;-8;\cdots$ **D.** $1;-3;-5;-7;-9;\cdots$

Câu 2. Dãy số nào sau đây không phải là cấp số cộng?

A. $-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};0;\frac{1}{3};\frac{2}{3};1;\frac{4}{3}....$ **B.** $15\sqrt{2};12\sqrt{2};9\sqrt{2};6\sqrt{2};....$

C. $\frac{4}{5};1;\frac{7}{5};\frac{9}{5};\frac{11}{5};....$ **D.** $\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{2\sqrt{3}}{3};\sqrt{3};\frac{4\sqrt{3}}{3};\frac{5}{\sqrt{3}};...$

Câu 3. Cho dãy số $\frac{1}{2};0;-\frac{1}{2};-1;-\frac{3}{2};.....$ là cấp số cộng với:

A. Số hạng đầu tiên là $\frac{1}{2}$, công sai là $\frac{1}{2}$.

B. Số hạng đầu tiên là $\frac{1}{2}$, công sai là $-\frac{1}{2}$.

C. Số hạng đầu tiên là 0, công sai là $\frac{1}{2}$.

D. Số hạng đầu tiên là 0, công sai là $-\frac{1}{2}$.

Câu 4. Cho cấp số cộng có số hạng đầu $u_1=-\frac{1}{2}$, công sai $d=\frac{1}{2}$. Năm số hạng liên tiếp đầu tiên của cấp số này là:

A. $-\frac{1}{2};0;1;\frac{1}{2};1.$ **B.** $-\frac{1}{2};0;\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}.$

C. $\frac{1}{2};1;\frac{3}{2};2;\frac{5}{2}.$ **D.** $-\frac{1}{2};0;\frac{1}{2};1;\frac{3}{2}.$

Câu 5. Viết ba số hạng xen giữa các số 2 và 22 để được một cấp số cộng có năm số hạng.

A. 7; 12; 17, **B.**6;10;14. **C.** 8; 13; 18. **D.** 6; 12; 18.

Câu 6. Cho hai số -3 và $23.$ Xen kẽ giữa hai số đã cho n số hạng để tất cả các số đó tạo thành cấp số cộng có công sai $d=2.$ Tìm $n.$

A. $n=12.$ **B.** $n=13.$ **C.** $n=14.$ **D.** $n=15.$

Câu 7. Cho các số -4; 1; 6; x theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tìm $x.$

A. $x=7.$ **B.** $x=10.$ **C.** $x=11.$ **D.** $x=12.$

Câu 8. Biết các số $C_n^1;\ C_n^2;\ C_n^3$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với $n>3.$ Tìm $n.$

A. $n=5$. **B.** $n=7$. **C.** $n=9$. **D.** $n=11$.

Câu 9. Nếu các số $5+m;\ 7+2m;\ 17+m$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì m bằng bao nhiêu?

A. $m=2$. **B.** $m=3$. **C.** $m=4$. **D.** $m=5$.

Câu 10. Với giá trị nào của x và y thì các số $-7;\ x;\ 11;\ y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số công?

A. $x=1; y=21$. **B.** $x=2; y=20$.

C. $x=3; y-19$. **D.** $x=4; y=18$.

Câu 11. Cho cấp số cộng (u_n) có các số hạng đầu lần lượt là $5;\ 9;\ 13;\ 17;\ \cdots$. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng.

A. $u_n=5n+1$. **B.** $u_n=5n-1$.

C. $u_n=4n+1$. **D.** $u_n=4n-1$.

Câu 12. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=-3$ và $d=\frac{1}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $u_n=-3+\frac{1}{2}(n+1)$. **B.** $u_n=-3+\frac{1}{2}n-1$.

C. $u_n=-3+\frac{1}{2}(n-1)$. **D.** $u_n=-3+\frac{1}{4}(n-1)$.

Câu 13. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3=15$ và $d=-2$. Tìm u_n.

A. $u_n=-2n+21$. **B.** $u_n=-\frac{3}{2}n+12$.

C. $u_n=-3n-17$. **D.** $u_n=\frac{3}{2}n^2-4$.

Câu 14. Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng?

A. $u_n=7-3n$. **B.** $u_n=7-3^n$.

C. $u_n=\frac{7}{3n}$. **D.** $u_n=7.3^n$.

Câu 15. Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng?

A. $u_n=(-1)^n(2n+1)$. **B.** $u_n=\sin\frac{\pi}{n}$.

C. $\begin{cases}u_1=1\\u_n=u_{n-1}-1\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}u_1=1\\u_n=2u_{n-1}\end{cases}$.

Câu 16. Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào không phải là cấp số cộng?

A. $u_n=-4n+9$. **B.** $u_n=-2n+19$.

C. $u_n=-2n-21$. **D.** $u_n=-2^n+15$.

Câu 17. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=-5$ và $d=3$. Số 100 là số hạng thứ mấy của cấp số cộng?

A. Thứ 15. **B.** Thứ 20. **C.** Thứ 35. **D.** Thứ 36.

Câu 18. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=-5$ và $d=3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $u_{15}=34$. **B.** $u_{15}=45$. **C.** $u_{13}=31$. **D.** $u_{10}=35$.

Câu 19. Một cấp số cộng có 8 số hạng. Số hạng đầu là 5, số hạng thứ tám là 40. Khi đó công sai d của cấp số cộng đó là bao nhiêu?

A. $d=4$. **B.** $d=5$. **C.** $d=6$. **D.** $d=7$.

Câu 20. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=4$ và $d=-5$. Tính tổng 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng.

A. $S_{100}=24350$. **B.** $S_{100}=-24350$.

C. $S_{100}=-24600$. **D.** $S_{100}=24600$.

Câu 21. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=\frac{1}{4}$ và $d=-\frac{1}{4}$. Gọi S_5 là tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_5=-\frac{5}{4}$. **B.** $S_5=\frac{4}{5}$. **C.** $S_5=\frac{5}{4}$. **D.** $S_5=-\frac{4}{5}$.

Câu 22. Số hạng tổng quát của một cấp số cộng là $u_n=3n+4$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Gọi S_n là tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n=\frac{3^n-1}{2}$. **B.** $S_n=\frac{7(3^n-1)}{2}$.

C. $S_n=\frac{3n^2+5n}{2}$. **D.** $S_n=\frac{3n^2+11n}{2}$.

Câu 23. Xét các số nguyên dương chia hết cho 3. Tổng số 50 số nguyên dương đầu tiên đó bằng:

A. 7650. **B.** 7500. **C.** 3900. **D.** 3825.

Câu 24. Cho cấp số cộng (u_n) có $d=-2$ và $S_8=72$. Tìm số hạng đầu tiên u_1.

A. $u_1=16$. **B.** $u_1=-16$. **C.** $u_1=\frac{1}{16}$. **D.** $u_1=-\frac{1}{16}$.

Câu 25. Một cấp số cộng có số hạng đầu là 1, công sai là 4, tổng của n số hạng đầu là 561. Khi đó số hạng thứ n của cấp số cộng đó là u_n có giá trị là bao nhiêu?

A. $u_n=57$. **B.** $u_n=61$. **C.** $u_n=65$. **D.** $u_n=69$.

Câu 26. Một cấp số cộng có 12 số hạng. Biết rằng tổng của 12 số hạng đó bằng 144 và số hạng thứ mười hai bằng 23. Khi đó công sai d của cấp số cộng đã cho là bao nhiêu?

A. $d=2$. **B.** $d=3$. **C.** $d=4$. **D.** $d=5$.

Câu 27. Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng là $S_n=\frac{3n^2-19n}{4}$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Tìm số hạng đầu tiên u_1 và công sai d của cấp số cộng đã cho.

A. $u_1=2;\ d=-\frac{1}{2}$. **B.** $u_1=-4;\ d=\frac{3}{2}$.

C. $u_1=-\frac{3}{2};\ d=-2$. **D.** $u_1=\frac{5}{2};\ d=\frac{1}{2}$.

Câu 28. Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng là $S_n=n^2+4n$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng đã cho.

A. $u_n=2n+3$. **B.** $u_n=3n+2$.

C. $u_n=5.3^{n-1}$. **D.** $u_n=5.\left(\frac{8}{5}\right)^{n-1}$.

Câu 29. Tính tổng $S=1-2+3-4+5+...+(2n-1)-2n$ với $n\geq 1$ và $n\in\mathbb{N}$.

A. $S=0$. **B.** $S=-1$. **C.** $S=n$. **D.** $S=-n$.

Câu 30. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $u_2+u_8+u_9+u_{15}=100$. Tính tổng 16 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho.

A. $S_{16}=100$. **B.** $S_{16}=200$. **C.** $S_{16}=300$. **D.** $S_{16}=400$.

Câu 31. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4=-12$ và $u_{14}=18$. Tìm số hạng đầu tiên u_1 và công sai d của cấp số cộng đã cho.

A. $u_1=-21;\ d=3$. **B.** $u_1=-20;\ d=-3$.

C. $u_1=-22;\ d=3$. **D.** $u_1=-21;\ d=-3$.

Câu 32. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2=2001$ và $u_5=1995$. Khi đó u_{1001} bằng:

A. $u_{1001}=4005$. **B.** $u_{1001}=4003$.

C. $u_{1001}=3$. **D.** $u_{1001}=1$.

Câu 33. Cho cấp số cộng (u_n), biết: $u_n=-1, u_{n+1}=8$. Tính công sai d cảu cấp số cộng đó.

A. $d=-9$. **B.** $d=7$. **C.** $d=-7$. **D.** $d=9$.

Câu 34. Cho cấp số cộng (u_n). Hãy chọn hệ thức đúng trong các hệ thức sau:

A. $\frac{u_{10}+u_{20}}{2}=u_5+u_{10}$. **B.** $u_{90}+u_{210}=2u_{150}$.

C. $u_{10}.u_{30}=u_{20}$. **D.** $\frac{u_{10}.u_{30}}{2}=u_{20}$.

Câu 35. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $u_2+u_{23}=60$. Tính tổng S_{24} của 24 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho.

A. $S_{24}=60$. **B.** $S_{24}=120$. **C.** $S_{24}=720$. **D.** $S_{24}=1440$.

Câu 36. Một cấp số cộng có 6 số hạng. Biết rằng tổng của số hạng đầu và số hạng cuối bằng 17; tổng của số hạng thứ hai và số hạng thứ tư bằng 14. Tìm công sai d của câp số cộng đã cho.

A. $d=2$. **B.** $d=-3$. **C.** $d=4$. **D.** $d=5$.

Câu 37. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases}u_7-u_3=8\\u_2u_7=75\end{cases}$. Tìm công sai d của câp số cộng đã cho.

A. $d=\frac{1}{2}$. **B.** $d=\frac{1}{3}$. **C.** $d=2$. **D.** $d=3$.

Câu 38. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases}u_1+u_7=26\\{u_2}^2+{u_6}^2=466\end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\begin{cases}u_1=13\\d=-3\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}u_1=10\\d=-3\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}u_1=1\\d=4\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}u_1=13\\d=-4\end{cases}$.

Câu 39. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases}u_1-u_3+u_5=15\\u_1+u_6=27\end{cases}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\begin{cases}u_1=21\\d=3\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}u_1=21\\d=-3\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}u_1=18\\d=3\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}u_1=21\\d=4\end{cases}$.

Câu 40. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa $\begin{cases}u_2+u_4+u_6=36\\u_2u_3=54\end{cases}$. Tìm công sai d của cấp số cộng (u_n) biết $d<10$.

A. $d=3$. **B.** $d=4$. **C.** $d=5$. **D.** $d=6$.

Câu 41. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa $\begin{cases}u_1+u_2+u_3=27\\u_1^2+u_2^2+u_3^2=275\end{cases}$. Tính u_2.

A. $u_2=3$. **B.** $u_2=6$. **C.** $u_2=9$. **D.** $u_2=12$.

Câu 42. Tính tổng $T=15+20+25+...+7515$.

A. $T=5651265$. **B.** $T=5651256$.

C. $T=5651625$. **D.** $T=5651526$.

Câu 43. Tính tổng
$T=1000^2-999^2+998^2-997^2+...+2^2-1^2$.

A. $T=500500$. **B.** $T=500005$.

C. $T=505000$. **D.** $T=500050$.

Câu 44. Cho cấp số cộng $u_1;\ u_2;\ u_3;\ \cdots;\ u_n$ có công sai d, các số hạng của cấp số cộng đã cho đều khác 0. Với giá trị nào của d thì dãy số $\frac{1}{u_1};\ \frac{1}{u_2};\ \frac{1}{u_3};\ \cdots;\ \frac{1}{u_n}$ là một cấp số cộng?

A. $d=-1$. **B.** $d=0$. **C.** $d=1$. **D.** $d=2$.

Câu 45. Nếu $a;\ b;\ c$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì dãy số nào sau đây lập thành cấp số cộng?

A. $2b^2;\ a^2;\ c^2$. **B.** $-2b;-2a;-2c$.

C. $2b;\ a;\ c$. **D.** $2b;\ -a;\ -c$.

Câu 46. Nếu $\frac{1}{b+c};\ \frac{1}{c+a};\ \frac{1}{a+b}$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì dãy số nào sau đây lập thành cấp số cộng?

A. $b^2;\ a^2;\ c^2$. **B.** $c^2;\ a^2;\ b^2$. **C.** $a^2;\ b^2;\ c^2$. **D.** $a^2;\ c^2;\ b^2$.

Câu 47. Cho $a;\ b;\ c$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a^2+c^2+2ac=4b^2$. **B.** $a^2+c^2=2ab-2bc$.

C. $a^2-c^2=ab-bc$. **D.** $a^2-c^2=2ab-2bc$.

Câu 48. Ba góc của một tam giác vuông tạo thành cấp số cộng. Hai góc nhọn của tam giác có số đo (độ) là:

A. 20° và 70°. **B.** 45° và 45°.

C. 20° và 45°. **D.** 30° và 60°.

Câu 49. Ba góc $A, B, C\ (A<B<C)$ của tam giác tạo thành cấp số cộng, biết góc lớn nhất gấp đôi góc bé nhất. Hiệu số đo độ của góc lớn nhất với góc nhỏ nhất bằng:

A. 40°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 80°.

Câu 50. Một tam giác vuông có chu vi bằng 3 và độ dài các cạnh lập thành một cấp số cộng. Độ dài các cạnh của tam giác đó là:

A. $\frac{1}{2};\ 1;\ \frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{3};\ 1;\ \frac{5}{3}$. **C.** $\frac{3}{4};\ 1;\ \frac{5}{4}$. **D.** $\frac{1}{4};\ 1;\ \frac{7}{4}$.

Câu 51. Một rạp hát có 30 dãy ghế, dãy đầu tiên có 25 ghế. Mỗi dãy sau có hơn dãy trước 3 ghế. Hỏi rạp hát có tất cả bao nhiêu ghế?

A. 1635. **B.** 1792. **C.** 2055. **D.** 3125.

Câu 52. Người ta trồng 3003 cây theo một hình tam giác như sau: hàng thứ nhất trồng 1 cây, hàng thứ hai trồng 2 cây, hàng thứ ba trồng 3 cây,...Hỏi có tất cả bao nhiêu hàng cây?

A. 73. **B.** 75. **C.** 77. **D.** 79.

Câu 53. Một chiếc đồng hồ đánh chuông, kể từ thời điểm 0 (giờ) thì sau mỗi giờ thì số tiếng chuông được đánh đúng bằng số giờ mà đồng hồ chỉ tại thời điểm đánh chuông. Hỏi một ngày đồng hồ đó đánh bao nhiêu tiếng chuông?

A. 78. **B.** 156. **C.** 300. **D.** 48.

Câu 54. Trên một bàn cờ có nhiều ô vuông, người ta đặt 7 hạt dẻ vào ô đầu tiên, sau đó đặt tiếp vào ô thứ hai số hạt nhiều hơn ô thứ nhất là 5, tiếp tục đặt vào ô thứ ba số hạt nhiều hơn ô thứ hai là 5,… và cứ thế tiếp tục đến ô thứ n. Biết rằng đặt hết số ô trên bàn cờ người ta phải sử dụng 25450 hạt. Hỏi bàn cờ đó có bao nhiêu ô vuông?

A. 98. **B.** 100. **C.** 102. **D.** 104.

Câu 55. Một gia đình cần khoan một cái giếng để lấy nước. Họ thuê một đội khoan giếng nước đến để khoan giếng nước. Biết giá của mét khoan đầu tiên là 80.000 đồng, kể từ mét khoan thứ 2 giá của mỗi mét khoan tăng thêm 5000 đồng so với giá của mét khoan trước đó. Biết cần phải khoan sâu xuống 50m mới có nước. Vậy hỏi phải trả bao nhiêu tiền để khoan cái giếng đó?

A. 5.2500.000 đồng. **B.** 10.125.000 đồng.

C. 4.000.000 đồng. **D.** 4.245.000 đồng.

Phần 2. Câu hỏi trắc nghiệm liên quan đến cấp số nhân

Câu 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

A. $128;\ -64;\ 32;\ -16;\ 8;\ ...$ **B.** $\sqrt{2};\ 2;\ 4;\ 4\sqrt{2};\ ....$

C. $5;\ 6;\ 7;\ 8;\ ...$ **D.** $15;\ 5;\ 1;\ \frac{1}{5};\ ...$

Câu 2. Trong các dãy số sau, dãy số nào không phải là một cấp số nhân?

A. $2;\ 4;\ 8;\ 16;\ \ldots$ **B.** $1;\ -1;\ 1;\ -1;\ \cdots$

C. $1^2;\ 2^2;\ 3^2;\ 4^2;\ \cdots$ **D.** $a;\ a^3;\ a^5;\ a^7;\ \cdots(a\neq 0)$.

Câu 3. Dãy số nào sau đây không phải là cấp số nhân?

A. $1;\ 2;\ 4;\ 8;\ \cdots$ **B.** $3;\ 3^2;\ 3^3;\ 3^4;\ \cdots$

C. $4;\ 2;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \cdots$ **D.** $\frac{1}{\pi};\ \frac{1}{\pi^2};\ \frac{1}{\pi^4};\ \frac{1}{\pi^6};\ \cdots$

Câu 4. Dãy số $1;\ 2;\ 4;\ 8;\ 16;\ 32;\ \cdots$ là một cấp số nhân với:

A. Công bội là 3 và số hạng đầu tiên là 1.

B. Công bội là 2 và số hạng đầu tiên là 1.

C. Công bội là 4 và số hạng đầu tiên là 2.

D. Công bội là 2 và số hạng đầu tiên là 2.

Câu 5. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1=-2$ và $q=-5$. Viết bốn số hạng đầu tiên của cấp số nhân.

A. $-2;\ 10;\ 50;\ -250$. **B.** $-2;\ 10;\ -50;\ 250$.

C. $-2;\ -10;\ -50;\ -250$. **D.** $-2;\ 10;\ 50;\ 250$.

Câu 6. Cho cấp số nhân $\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8};\cdots;\frac{1}{4096}$. Hỏi số $\frac{1}{4096}$ là số hạng thứ mấy trong cấp số nhân đã cho?

A. 11. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 13.

Câu 7. Một cấp số nhân có hai số hạng liên tiếp là 16 và 36. Số hạng tiếp theo là:

A. 720. **B.** 81. **C.** 64. **D.** 56.

Câu 8. Tìm x để các số $2;\ 8;\ x;\ 128$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $x=14$. **B.** $x=32$. **C.** $x=64$. **D.** $x=68$.

Câu 9. Với giá trị x nào dưới đấy thì các số $-4;\ x;\ -9$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân?

A. $x=36$. **B.** $x=-\frac{13}{2}$. **C.** $x=6$. **D.** $x=-36$.

Câu 10. Tìm $b>0$ để các số $\frac{1}{\sqrt{2}};\ \sqrt{b};\ \sqrt{2}$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $b=-1$. **B.** $b=1$. **C.** $b=2$. **D.** $b=-2$.

Câu 11. Tìm tất cả giá trị của x để ba số $2x-1;\ x;\ 2x+1$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $x=\pm\frac{1}{3}$. **C.** $x=\pm\sqrt{3}$. **D.** $x=\pm 3$.

Câu 12. Tìm x để ba số $1+x;\ 9+x;\ 33+x$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $x=1$. **B.** $x=3$.

C. $x=7$. **D.** $x=3;\ x=7$.

Câu 13. Với giá trị $x,\ y$ nào dưới đây thì các số hạng lần lượt là $-2;\ x;\ -18;\ y$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân?

A. $\begin{cases}x=6\\y=-54\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=-10\\y=-26\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-6\\y=-54\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-6\\y=54\end{cases}$.

Câu 14. Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là $x;\ 12;\ y;\ 192$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x=1;y=144$. **B.** $x=2;y=72$.

C. $x=3;y=48$. **D.** $x=4;y=36$.

Câu 15. Thêm hai số thực dương x và y vào giữa hai số 5 và 320 để được bốn số $5;\ x;\ y;\ 320$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhận. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\begin{cases}x=25\\y=125\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=20\\y=80\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=15\\y=45\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=30\\y=90\end{cases}$.

Câu 16. Ba số hạng đầu của một cấp số nhân là $x-6;\ x$ và y. Tìm y, biết rằng công bội của cấp số nhân là 6.

A. $y=216.$ **B.** $y=\dfrac{324}{5}.$ **C.** $y=\dfrac{1296}{5}.$ **D.** $y=12.$

Câu 17. Hai số hạng đầu của của một cấp số nhân là $2x+1$ và $4x^2-1$. Số hạng thứ ba của cấp số nhân là:

A. $2x-1.$ **B.** $2x+1.$

C. $8x^3-4x^2-2x+1.$ **D.** $8x^3+4x^2-2x-1.$

Câu 18. Dãy số nào sau đây là cấp số nhân?

A. $\begin{cases}u_1=1\\u_{n+1}=u_n+1,\ n\ge 1\end{cases}.$ **B.** $\begin{cases}u_1=-1\\u_{n+1}=-3u_n,\ n\ge 1\end{cases}.$

C. $\begin{cases}u_1=-2\\u_{n+1}=2u_n+3,\ n\ge 1\end{cases}.$ **D.** $\begin{cases}u_1=\dfrac{\pi}{2}\\u_n=\sin\left(\dfrac{\pi}{n-1}\right),\ n\ge 1\end{cases}.$

Câu 19. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{3}{2}.5^n$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. (u_n) không phải là cấp số nhân.

B. (u_n) là cấp số nhân có công bội $q=5$ và số hạng đầu $u_1=\dfrac{3}{2}.$

C. (u_n) là cấp số nhân có công bội $q=5$ và số hạng đầu $u_1=\dfrac{15}{2}.$

D. (u_n) là cấp số nhân có công bội $q=\dfrac{5}{2}$ và số hạng đầu $u_1=3.$

Câu 20. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

A. $u_n=\dfrac{1}{3^{n-2}}.$ **B.** $u_n=\dfrac{1}{3^n}-1.$

C. $u_n=n+\dfrac{1}{3}.$ **D.** $u_n=n^2-\dfrac{1}{3}.$

Câu 21. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

A. $u_n=7-3n.$ **B.** $u_n=7-3^n.$ **C.** $u_n=\dfrac{7}{3n}.$ **D.** $u_n=7.3^n.$

Câu 22. Cho dãy số (u_n) là một cấp số nhân với $u_n\ne 0,\ n\in\mathbb{N}^*$. Dãy số nào sau đây không phải là cấp số nhân?

A. $u_1;\ u_3;\ u_5;\ ...$ **B.** $3u_1;\ 3u_2;\ 3u_3;\ ...$

C. $\dfrac{1}{u_1};\ \dfrac{1}{u_2};\ \dfrac{1}{u_3};\ ...$ **D.** $u_1+2;\ u_2+2;\ u_3+2;\ ...$

Câu 23. Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là $3;\ 9;\ 27;\ 81;\ \ldots$. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số nhân đã cho.

A. $u_n=3^{n-1}.$ **B.** $u_n=3^n.$ **C.** $u_n=3^{n+1}.$ **D.** $u_n=3+3^n.$

Câu 24. Một cấp số nhân có 6 số hạng, số hạng đầu bằng 2 và số hạng thứ sáu bằng 486. Tìm công bội q của cấp số nhân đã cho.

A. $q=3.$ **B.** $q=-3.$ **C.** $q=2.$ **D.** $q=-2.$

Câu 25. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=-3$ và $q=\dfrac{2}{3}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $u_5=-\dfrac{27}{16}.$ **B.** $u_5=-\dfrac{16}{27}.$ **C.** $u_5=\dfrac{16}{27}.$ **D.** $u_5=\dfrac{27}{16}.$

Câu 26. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=2$ và $u_2=-8$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_6=130.$ **B.** $u_5=256.$ **C.** $S_5=256.$ **D.** $q=-4.$

Câu 27. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=3$ và $q=-2$. Số 192 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân đã cho?

A. Số hạng thứ 5. **B.** Số hạng thứ 6.

C. Số hạng thứ 7. **D.** Không là số hạng của cấp số đã cho.

Câu 28. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=-1$ và $q=-\dfrac{1}{10}$. Số $\dfrac{1}{10^{103}}$ là số hạng thứ mấy của cấp số nhân đã cho?

A. Số hạng thứ 103. **B.** Số hạng thứ 104.

C. Số hạng thứ 105. **D.** Không là số hạng của cấp số đã cho.

Câu 29. Một cấp số nhân có công bội bằng 3 và số hạng đầu bằng 5. Biết số hạng chính giữa là 32805. Hỏi cấp số nhân đã cho có bao nhiêu số hạng?

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 9.

Câu 30. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_n = 81$ và $u_{n+1} = 9$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $q = \frac{1}{9}$. **B.** $q = 9$. **C.** $q = -9$. **D.** $q = -\frac{1}{9}$.

Câu 31. Một dãy số được xác định bởi $u_1 = -4$ và $u_n = -\frac{1}{2}u_{n-1}$, $n \geq 2$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số đó là:

A. $u_n = 2^{n-1}$. **B.** $u_n = (-2)^{n-1}$.

C. $u_n = -4\left(2^{-n+1}\right)$. **D.** $u_n = -4\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Câu 32. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -3$ và $q = -2$. Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho.

A. $S_{10} = -511$. **B.** $S_{10} = -1025$.

C. $S_{10} = 1025$. **D.** $S_{10} = 1023$.

Câu 33. Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là $1;\ 4;\ 16;\ 64;\ \cdots$ Gọi S_n là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n = 4^{n-1}$. **B.** $S_n = \frac{n\left(1+4^{n-1}\right)}{2}$.

C. $S_n = \frac{4^n - 1}{3}$. **D.** $S_n = \frac{4\left(4^n - 1\right)}{3}$.

Câu 34. Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là $\frac{1}{4};\ \frac{1}{2};\ 1;\ \cdots;\ 2048$. Tính tổng S của tất cả các số hạng của cấp số nhân đã cho.

A. $S = 2047,75$. **B.** $S = 2049,75$.

C. $S = 4095,75$. **D.** $S = 4096,75$.

Câu 35. Tính tổng

$S = -2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - \ldots + (-2)^{n-1} + (-2)^n$ với $n \geq 1,\ n \in \mathbb{N}$.

A. $S = 2n$. **B.** $S = 2^n$.

C. $S = \frac{-2\left(1-2^n\right)}{1-2}$. **D.** $S = -2.\frac{1-(-2)^n}{3}$.

Câu 36. Một cấp số nhân có 6 số hạng với công bội bằng 2 và tổng số các số hạng bằng 189. Tìm số hạng cuối u_6 của cấp số nhân đã cho.

A. $u_6 = 32$. **B.** $u_6 = 104$.

C. $u_6 = 48$. **D.** $u_6 = 96$.

Câu 37. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -6$ và $q = -2$. Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho bằng 2046. Tìm n.

A. $n = 9$. **B.** $n = 10$. **C.** $n = 11$. **D.** $n = 12$.

Câu 38. Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n = 5^n - 1$. Tìm số hạng thứ 4 của cấp số nhân đã cho.

A. $u_4 = 100$. **B.** $u_4 = 124$. **C.** $u_4 = 500$. **D.** $u_4 = 624$.

Câu 39. Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n = \frac{3^n - 1}{3^{n-1}}$. Tìm số hạng thứ 5 của cấp số nhân đã cho.

A. $u_5 = \frac{2}{3^4}$. **B.** $u_5 = \frac{1}{3^5}$. **C.** $u_5 = 3^5$. **D.** $u_5 = \frac{5}{3^5}$.

Câu 40. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = -2$ và $u_5 = 54$. Tính tổng 1000 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho.

A. $S_{1000} = \frac{1-3^{1000}}{4}$. **B.** $S_{1000} = \frac{3^{1000}-1}{2}$.

C. $S_{1000} = \frac{3^{1000}-1}{6}$. **D.** $S_{1000} = \frac{1-3^{1000}}{6}$.

Câu 41. Cho cấp số nhân (u_n) có tổng của hai số hạng đầu tiên bằng 4, tổng của ba số hạng đầu tiên bằng 13. Tính tổng của năm số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho, biết công bội của cấp số nhân là một số dương.

A. $S_5 = \frac{181}{16}$. **B.** $S_5 = 141$. **C.** $S_5 = 121$. **D.** $S_5 = \frac{35}{16}$.

Câu 42. Một cấp số nhân có số hạng thứ bảy bằng $\frac{1}{2}$, công bội bằng $\frac{1}{4}$. Hỏi số hạng đầu tiên của cấp số nhân bằng bào nhiêu?

A. 4096. **B.** 2048. **C.** 1024. **D.** $\frac{1}{512}$.

Câu 43. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2=-6$ và $u_6=-486$. Tìm công bội q của cấp số nhân đã cho, biết rằng $u_3>0$.

A. $q=-3$. **B.** $q=-\frac{1}{3}$. **C.** $q=\frac{1}{3}$. **D.** $q=3$.

Câu 44. Cho cấp số nhân $u_1;\ u_2;\ u_3;\ \cdots$ với $u_1=1$. Tìm công bội q để $4u_2+5u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $q=-\frac{2}{5}$. **B.** $q=0$. **C.** $q=\frac{2}{5}$. **D.** $q=1$.

Câu 45. Một cấp số nhân có số hạng thứ hai bằng 4 và số hạng thứ sáu bằng 64, thì số hạng tổng quát của cấp số nhân đó có thể tính theo công thức nào dưới đây?

A. $u_n=2^{n-1}$. **B.** $u_n=2^n$

C. $u_n=2^{n+1}$. **D.** $u_n=2n$.

Câu 46. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $u_k=u_1.q^{k-1}$. **B.** $u_k=\frac{u_{k-1}+u_{k+1}}{2}$.

C. $u_k=\sqrt{u_{k+1}.u_{k+2}}$. **D.** $u_k=u_1+(k-1)q$.

Câu 47. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1\neq 0$ và $q\neq 0$. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $u_7=u_4.q^3$. **B.** $u_7=u_4.q^4$.

C. $u_7=u_4.q^5$. **D.** $u_7=u_4.q^6$.

Câu 48. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1\neq 0$ và $q\neq 0$. Với $1<k<m$, đẳng thức nào dưới đây là đúng?

A. $u_m=u_k.q^k$. **B.** $u_m=u_k.q^m$.

C. $u_m=u_k.q^{m-k}$. **D.** $u_m=u_k.\mathrm{q}^{m+k}$.

Câu 49. Cho một cấp số nhân có 15 số hạng. Đẳng thức nào sau đây là sai?

A. $u_1.u_{15}=u_2.u_{14}$. **B.** $u_1.u_{15}=u_5.u_{11}$.

C. $u_1.u_{15}=u_6.u_9$. **D.** $u_1.u_{15}=u_{12}.u_4$.

Câu 50. Cho một cấp số nhân có n số hạng $(n>k>55)$. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $u_1.u_n=u_2.u_{n-1}$. **B.** $u_1.u_n=u_5.u_{n-4}$.

C. $u_1.u_n=u_{55}.u_{n-55}$. **D.** $u_1.u_n=u_k.u_{n-k+1}$.

Câu 51. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân (u_n), biết $\begin{cases}u_6=192\\u_7=384\end{cases}$.

A. $\begin{cases}u_1=5\\q=2\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}u_1=6\\q=2\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}u_1=6\\q=3\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}u_1=5\\q=3\end{cases}$.

Câu 52. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases}u_4-u_2=36\\u_5-u_3=72\end{cases}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $\begin{cases}u_1=4\\q=2\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}u_1=6\\q=2\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}u_1=9\\q=2\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}u_1=9\\q=3\end{cases}$.

Câu 53. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases}u_{20}=8u_{17}\\u_1+u_5=272\end{cases}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $q=2$. **B.** $q=-4$. **C.** $q=4$. **D.** $q=-2$.

Câu 54. Một cấp số nhân có năm số hạng mà hai số hạng đầu tiên là các số dương, tích của số hạng đầu và số hạng thứ ba bằng 1, tích của số hạng thứ ba và số hạng cuối bằng $\frac{1}{16}$. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân đã cho.

A. $\begin{cases}u_1=\frac{1}{2}\\q=2\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}u_1=2\\q=\frac{1}{2}\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}u_1=-2\\q=-\frac{1}{2}\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}u_1=-\frac{1}{2}\\q=-2\end{cases}$.

Câu 55. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa $\begin{cases}u_1-u_3+u_5=65\\u_1+u_7=325\end{cases}$. Tính u_3.

A. $u_3=10$. **B.** $u_3=15$. **C.** $u_3=20$. **D.** $u_3=25$.

Câu 56. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa $\begin{cases}u_1+u_2+u_3=14\\u_1.u_2.u_3=64\end{cases}$. Tính u_2.

A. $u_2=4$. **B.** $u_2=6$. **C.** $u_2=8$. **D.** $u_2=10$.

Câu 57. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q và thỏa

$$\begin{cases}u_1+u_2+u_3+u_4+u_5=49\left(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}+\frac{1}{u_4}+\frac{1}{u_5}\right)\\u_1+u_3=35\end{cases}.$$

Tính $P=u_1+4q^2$.

A. $P=24.$ **B.** $P=29.$ **C.** $P=34.$ **D.** $P=39.$

Câu 58. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q và thỏa $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=26 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2=364 \end{cases}$. Tìm q biết rằng $q>1$.

A. $q=\frac{5}{4}.$ **B.** $q=4.$ **C.** $q=\frac{4}{3}.$ **D.** $q=3.$

Câu 59. Các số $x+6y,\ 5x+2y,\ 8x+y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng; đồng thời các số $x-1,\ y+2,\ x-3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Tính x^2+y^2.

A. $x^2+y^2=40.$ **B.** $x^2+y^2=25.$

C. $x^2+y^2=100.$ **D.** $x^2+y^2=10.$

Câu 60. Ba số $x;\ y;\ z$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân với công bội q khác 1; đồng thời các số $x;\ 2y;\ 3z$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với công sai khác 0. Tìm giá trị của q.

A. $q=\frac{1}{3}.$ **B.** $q=\frac{1}{9}.$ **C.** $q=-\frac{1}{3}.$ **D.** $q=-3.$

Câu 61. Cho dãy số tăng $a,\ b,\ c\ (c\in\mathbb{Z})$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân; đồng thời $a,\ b+8,\ c$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng và $a,\ b+8,\ c+64$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tính giá trị biểu thức $P=a-b+2c$.

A. $P=\frac{184}{9}.$ **B.** $P=64.$ **C.** $P=\frac{92}{9}.$ **D.** $P=32.$

Câu 62. Số hạng thứ hai, số hạng đầu và số hạng thứ ba của một cấp số cộng với công sai khác 0 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân với công bội q. Tìm q.

A. $q=2.$ **B.** $q=-2.$ **C.** $q=-\frac{3}{2}.$ **D.** $q=\frac{3}{2}.$

Câu 63. Cho bố số a, b, c, d biết rằng a, b, c theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân công bội $q>1$; còn b, c, d theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng. Tìm q biết rằng $a+d=14$ và $b+c=12$.

A. $q=\frac{18+\sqrt{73}}{24}.$ **B.** $q=\frac{19+\sqrt{73}}{24}.$

C. $q=\frac{20+\sqrt{73}}{24}.$ **D.** $q=\frac{21+\sqrt{73}}{24}.$

Câu 64. Gọi $S=9+99+999+...+999...9$ (n số 9) thì S nhận giá trị nào sau đây?

A. $S=\frac{10^n-1}{9}.$ **B.** $S=10\left(\frac{10^n-1}{9}\right).$

C. $S=10\left(\frac{10^n-1}{9}\right)-n.$ **D.** $S=10\left(\frac{10^n-1}{9}\right)+n.$

Câu 65. Gọi $S=1+11+111+...+111...1$ (n số 1) thì S nhận giá trị nào sau đây?

A. $S=\frac{10^n-1}{81}.$ **B.** $S=10\left(\frac{10^n-1}{81}\right).$

C. $S=10\left(\frac{10^n-1}{81}\right)-n.$ **D.** $S=\frac{1}{9}\left[10\left(\frac{10^n-1}{9}\right)-n\right].$

Câu 66. Biết rằng $S=1+2.3+3.3^2+...+11.3^{10}=a+\frac{21.3^b}{4}.$ Tính $P=a+\frac{b}{4}.$

A. $P=1.$ **B.** $P=2.$ **C.** $P=3.$ **D.** $P=4.$

Câu 67. Một cấp số nhân có ba số hạng là $a,\ b,\ c$ (theo thứ tự đó) trong đó các số hạng đều khác 0 và công bội $q\neq 0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\frac{1}{a^2}=\frac{1}{bc}.$ **B.** $\frac{1}{b^2}=\frac{1}{ac}.$ **C.** $\frac{1}{c^2}=\frac{1}{ba}.$ **D.** $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{c}.$

Câu 68. Bốn góc của một tứ giác tạo thành cấp số nhân và góc lớn nhất gấp 27 lần góc nhỏ nhất. Tổng của góc lớn nhất và góc bé nhất bằng:

A. $56^0.$ **B.** $102^0.$ **C.** $252^0.$ **D.** $168^0.$

Câu 69. Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nữa diện tích của mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích của đế tháp (có diện tích là 12 288 m^2). Tính diện tích mặt trên cùng.

A. $6m^2.$ **B.** $8m^2.$ **C.** $10m^2.$ **D.** $12m^2.$

Câu 70. Một du khách vào chuồng đua ngựa đặt cược, lần đầu đặt 20000 đồng, mỗi lần sau tiền đặt gấp đôi lần tiền đặt cọc trước. Người đó thua 9 lần liên tiếp và thắng ở lần thứ $10.$ Hỏi du khác trên thắng hay thua bao nhiêu?

A. Hòa vốn. **B.** Thua 20000 đồng.

C. Thắng 20000 đồng. **D.** Thua 40000 đồn

CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

Vấn đề 1. Xác định cấp số và xác yếu tố của cấp số

Ví dụ 1. Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng biết tổng của chúng bằng 20 và tổng các bình phương của chúng bằng 120.

Lời giải.
Giả sử bốn số hạng đó là $a-3x;a-x;a+x;a+3x$ với công sai là $d=2x$ .Khi đó, ta có:

$$\begin{cases}(a-3x)+(a-x)+(a+x)+(a+3x)=20\\(a-3x)^2+(a-x)^2+(a+x)^2+(a+3x)^2=120\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4a=20\\4a^2+20x^2=120\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=5\\x=\pm1\end{cases}$$

Vậy bốn số cần tìm là $2,4,6,8$.

Chú ý:
* Cách gọi các số hạng của cấp số cộng như trên giúp ta giải quyết bài toán gọn hơn.
* Nếu số hạng cấp số cộng là lẻ thì gọi công sai $d=x$, là chẵn thì gọi công sai $d=2x$ rồi viết các số hạng cấp số dưới dạng đối xứng.
* Nếu cấp số cộng (a_n) thỏa: $\begin{cases}a_1+a_2+...+a_n=p\\a_1^2+a_2^2+...+a_n^2=s^2\end{cases}$ thì:

$$a_1=\frac{1}{n}\left[p-\frac{n(n-1)}{2}.d\right] \text{ và } d=\pm\sqrt{\frac{12(ns^2-p^2)}{n^2(n^2-1)}}.$$

Ví dụ 2. Cho CSC (u_n) thỏa : $\begin{cases}u_2-u_3+u_5=10\\u_4+u_6=26\end{cases}$

1. Xác định công sai và công thức tổng quát của cấp số;
2. Tính $S=u_1+u_4+u_7+...+u_{2011}$.

Lời giải.
Gọi d là công sai của CSC, ta có:

$$\begin{cases}(u_1+d)-(u_1+2d)+(u_1+4d)=10\\(u_1+3d)+(u_1+5d)=26\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+3d=10\\u_1+4d=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=1\\d=3\end{cases}$$

1. Ta có công sai $d=3$ và số hạng tổng quát : $u_n=u_1+(n-1)d=3n-2$.

2. Ta có các số hạng $u_1,u_4,u_7,...,u_{2011}$ lập thành một CSC gồm 670 số hạng với công sai $d'=3d$, nên ta có:

$$S=\frac{670}{2}(2u_1+669d')=673015$$

Ví dụ 3. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa: $\begin{cases}u_5+3u_3-u_2=-21\\3u_7-2u_4=-34\end{cases}$.

1. Tính số hạng thứ 100 của cấp số ;
2. Tính tổng 15 số hạng đầu của cấp số ;
3. Tính $S=u_4+u_5+...+u_{30}$.

Lời giải.
Từ giả thiết bài toán, ta có: $\begin{cases}u_1+4d+3(u_1+2d)-(u_1+d)=-21\\3(u_1+6d)-2(u_1+3d)=-34\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+3d=-7\\u_1+12d=-34\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=2\\d=-3\end{cases}.$$

1. Số hạng thứ 100 của cấp số: $u_{100}=u_1+99d=-295$

2. Tổng của 15 số hạng đầu: $S_{15}=\frac{15}{2}\left[2u_1+14d\right]=-285$

3. Ta có: $S=u_4+u_5+...+u_{30}=\frac{27}{2}\left[2u_4+26d\right]$

$=27\left(u_1+16d\right)=-1242$.

Chú ý: Ta có thể tính S theo cách sau:

$$S=S_{30}-S_3=15\left(2u_1+29d\right)-\frac{3}{2}\left(2u_1+2d\right)=-1242.$$

Ví dụ 4. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases}u_2-u_3+u_5=10\\ u_4+u_6=26\end{cases}$

1. Xác định cấp số cộng **2.** Tính tổng $S=u_5+u_7+\ldots+u_{2011}$

Lời giải.

1. Ta có: $\begin{cases}u_1+d-(u_1+2d)+u_1+4d=10\\ u_1+3d+u_1+5d=26\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+3d=10\\ u_1+4d=13\end{cases}$

$\Leftrightarrow u_1=1,d=3$; $u_5=u_1+4d=1+12=13$

2. Ta có $u_5,u_7,...,u_{2011}$ lập thành CSC với công sai $d=6$ và có 1003 số hạng nên $S=\frac{1003}{2}\left(2u_5+1002.6\right)=3028057$.

Ví dụ 5. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_1=1$ và tổng 100 số hạng đầu bằng 24850. Tính

$S=\frac{1}{u_1u_2}+\frac{1}{u_2u_3}+...+\frac{1}{u_{49}u_{50}}$

Lời giải.

Gọi d là công sai của cấp số đã cho

Ta có: $S_{100}=50\left(2u_1+99d\right)=24850\Rightarrow d=\frac{497-2u_1}{99}=5$

$\Rightarrow 5S=\frac{5}{u_1u_2}+\frac{5}{u_2u_3}+...+\frac{5}{u_{49}u_{50}}$

$=\frac{u_2-u_1}{u_1u_2}+\frac{u_3-u_2}{u_2u_3}+...+\frac{u_{50}-u_{49}}{u_{49}u_{50}}$

$=\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_2}-\frac{1}{u_3}+...+\frac{1}{u_{48}}-\frac{1}{u_{49}}+\frac{1}{u_{49}}-\frac{1}{u_{50}}$

$=\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_{50}}=\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_1+49d}=\frac{245}{246}$

$\Rightarrow S=\frac{49}{246}$.

Ví dụ 6. Cho cấp số nhân (u_n) có các số hạng khác không, tìm u_1 biết:

1. $\begin{cases}u_1+u_2+u_3+u_4=15\\ u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2=85\end{cases}$ **2.** $\begin{cases}u_1+u_2+u_3+u_4+u_5=11\\ u_1+u_5=\frac{82}{11}\end{cases}$

Lời giải.

1. Ta có: $\begin{cases}u_1(1+q+q^2+q^3)=15\\ u_1^2\left(1+q^2+q^4+q^6\right)=85\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1\frac{q^4-1}{q-1}=15\\ u_1^2\frac{q^8-1}{q^2-1}=85\end{cases}$

$$\Rightarrow \left(\frac{q^4-1}{q-1}\right)^2\left(\frac{q^2-1}{q^8-1}\right)=\frac{45}{17} \Leftrightarrow \frac{(q^4-1)(q+1)}{(q-1)(q^4+1)}=\frac{45}{17} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q=2 \\ q=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Từ đó ta tìm được $u_1=1, u_1=8$.

2. Ta có: $\begin{cases} u_1\left(1+q+q^2+q^3+q^4\right)=11 \\ u_1(1+q^4)=\frac{82}{11}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q(1+q+q^2)=\frac{39}{11} \\ u_1(1+q^4)=\frac{82}{11}\end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{q^4+1}{q^3+q^2+q}=\frac{82}{39} \Leftrightarrow q=3, q=\frac{1}{3}.$$

Ví dụ 7. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa: $\begin{cases} u_4=\frac{2}{27} \\ u_3=243u_8\end{cases}$.

1. Viết năm số hạng đầu của cấp số;
2. Tính tổng 10 số hạng đầu của cấp số;
3. Số $\frac{2}{6561}$ là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số ?

Lời giải.

Gọi q là công bội của cấp số. Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} u_1q^3=\frac{2}{27} \\ u_1q^2=243.u_1q^7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^3=\frac{2}{27} \\ q^5=\frac{1}{243}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=\frac{1}{3} \\ u_1=2\end{cases}$$

1. Năm số hạng đầu của cấp số là:

$$u_1=2, u_2=\frac{2}{3}, u_3=\frac{2}{9}; u_4=\frac{2}{27}, u_5=\frac{2}{81}.$$

2. Tổng 10 số hạng đầu của cấp số

$$S_{10}=u_1\frac{q^{10}-1}{q-1}=2.\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{10}-1}{\frac{1}{3}-1}=3\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right]=\frac{59048}{19683}.$$

3. Ta có: $u_n=\frac{2}{3^{n-1}} \Rightarrow u_n=\frac{2}{6561} \Leftrightarrow 3^{n-1}=6561=3^8 \Rightarrow n=9$

Vậy $\frac{2}{6561}$ là số hạng thứ 9 của cấp số.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Dãy số (u_n) có phải là cấp số cộng không ? Nếu phải hãy xác định số công sai ? Biết:

1. $u_n=2n+3$ **2.** $u_n=-3n+1$ **3.** $u_n=n^2+1$ **4.** $u_n=\frac{2}{n}$

Bài 2 . Dãy số (u_n) có phải là cấp số nhân không ? Nếu phải hãy xác định số công bội ? Biết:

1. $u_n=2n$ **2.** $u_n=4.3^n$ **3.** $u_n=\frac{2}{n}$.

Bài 3. Xét xem các dãy số sau có phải là cấp số cộng hay không? Nếu phải hãy xác định công sai.

1. $u_n=3n+1$ **2.** $u_n=4-5n$ **3.** $u_n=\frac{2n+3}{5}$

4. $u_n=\frac{n+1}{n}$ **5.** $u_n=\frac{n}{2^n}$ **6.** $u_n=n^2+1$

Bài 4 Xét xem các dãy số sau có phải là cấp số nhân hay không? Nếu phải hãy xác định công bội.

1. $u_n = 2^n$ **2.** $u_n = -\frac{3^{n-1}}{5}$ **3.** $u_n = 3n - 1$

4. $u_n = \frac{2^n - 1}{3}$ **5.** $u_n = n^3$.

Bài 5.

1. Tam giác ABC có ba góc A, B, C theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng và $C = 5A$. Xác định số đo các góc A, B, C.

2. Cho tam giác ABC biết ba góc tam giác lập thành cấp số cộng và $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$ tính các góc của tam giác

Bài 6. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 3^{\frac{n}{2}+1}$

1. Chứng minh dãy số (u_n) là cấp số nhân

2. Tính tổng $S = u_2 + u_4 + u_6 + \ldots + u_{20}$

3. Số 19683 là số hạng thứ mấy của dãy số.

Bài 7.

1. Cho cấp số nhân có 7 số hạng, số hạng thứ tư bằng 6 và số hạng thứ 7 gấp 243 lần số hạng thứ hai. Hãy tìm số hạng còn lại của CSN đó.

2. Tìm ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng biết tổng của chúng bằng -9 và tổng các bình phương của chúng bằng 29.

3. Cho bốn số nguyên dương, trong đó ba số đầu lập thành một cấp số cộng, ba số sau lập thành cấp số nhân. Biết tổng số hạng đầu và cuối là 37, tổng hai số hạng giữa là 36, tìm bốn số đó.

Bài 8.

1. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2.u_7 = 75 \end{cases}$. Tìm u_1, d?

2. Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d > 0$; $\begin{cases} u_{31} + u_{34} = 11 \\ u_{31}^2 + u_{34}^2 = 101 \end{cases}$. Hãy tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng đó.

3. Gọi $S_1; S_2; S_3$ là tổng $n_1; n_2; n_3$ số hạng đầu của một cấp số cộng. Chứng minh rằng:

$$\frac{S_1}{n_1}(n_2 - n_3) + \frac{S_2}{n_2}(n_3 - n_1) + \frac{S_3}{n_3}(n_1 - n_2) = 0$$

Bài 9. Cho CSN (u_n) thỏa: $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 11 \\ u_1 + u_5 = \frac{82}{11} \end{cases}$

1. Tìm công bội và số hạng tổng quát của cấp số

2. Tính tổng S_{2011}

3. Trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ có bao nhiêu số hạng của cấp số.

Bài 10.

1. Cho dãy số $(x_n): x_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3...$. Chứng minh rằng luôn tồn tại một CSC gồm 2011 số hạng mà mỗi số hạng đều thuộc dãy số trên.

ĐÁP ÁN

Bài 1

1. Ta có: $u_{n+1} - u_n = 2(n+1) + 3 - (2n+3) = 2$ là hằng số

Suy ra dãy (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = 2$.

2. Ta có: $u_{n+1} - u_n = -3(n+1) + 1 - (-3n+1) = -3$ là hằng số

Suy ra dãy (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = -3$.

3. Ta có: $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + 1 - (n^2 + 1) = 2n + 1$ phụ thuộc vào n. Suy ra dãy (u_n) không phải là cấp số cộng.

4. Ta có: $u_{n+1}-u_n=\frac{2}{n+1}-\frac{2}{n}=\frac{-2}{n(n+1)}$ phụ thuộc vào n

Vậy dãy (u_n) không phải là cấp số cộng.

Bài 2 .

1. Ta có: $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+1}{n}$ phụ thuộc vào n suy ra dãy (u_n) không phải là cấp số nhân.

2. Ta có: $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{4.3^{n+1}}{4.3^n}=3$ không phụ thuộc vào n suy ra dãy (u_n) là một cấp số nhân với công bội $q=3$.

3. Ta có: $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2}{n+1}:\frac{2}{n}=\frac{n}{n+1}$ phụ thuộc vào n.

Suy ra dãy (u_n) không phải là cấp số nhân.

Bài 3.

1. Ta có: $u_{n+1}-u_n=3(n+1)+1-3n-1=3$

Dãy (u_n) là CSC có công sai $d=3$.

2. Ta có: $u_{n+1}-u_n=-5$

Dãy (u_n) là CSC có công sai $d=-5$

3. Ta có: $u_{n+1}-u_n=\frac{2}{5}$. Dãy (u_n) là CSC có công sai $d=\frac{2}{5}$

4. Ta có: $u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{n(n+1)}\Rightarrow(u_n)$ không là CSC

5. Tương tự ý 4 dãy (u_n) không là CSC

6. Tương tự ý 4 dãy (u_n) không là CSC.

Bài 4

1. Ta có: $\frac{u_{n+1}}{u_n}=2\Rightarrow(u_n)$ là CSN với công bội $q=2$

2. Ta có: $\frac{u_{n+1}}{u_n}=3\Rightarrow(u_n)$ là CSN với công bội $q=3$

3. Ta có: $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3n+2}{3n-1}\Rightarrow(u_n)$ không phải là CSN

4. Ta có: $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2^{n+1}-1}{2^n-1}\Rightarrow(u_n)$ không phải là CSN

5. Ta có: $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)^3}{n^3}\Rightarrow(u_n)$ không phải là CSN .

Bài 5.

1. Từ giả thiết bài toán ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases}A+B+C=180^0\\A+C=2B\\C=5A\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C=5A\\B=3A\\9A=180^0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=20^0\\B=60^0\\C=100^0\end{cases}.$$

2. Ba góc của tam giác: $30^0,60^0,90^0$

Bài 6.

1. Ta có: $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3^{\frac{n+1}{2}+1}}{3^{\frac{n}{2}+1}}=\sqrt{3}$, $\forall n\in N^*\Rightarrow$ Dãy số là cấp số nhân với $u_1=3\sqrt{3};q=\sqrt{3}$.

2. Ta có $u_2;u_4;u_6;\ldots;u_{20}$ lập thành cấp số nhân số hạng đầu $u_2=9;q=3$ và có 10 số hạng nên

$$S=u_2.\frac{1-3^{10}}{1-3}=9.\frac{3^{10}-1}{2}=\frac{9}{2}(3^{10}-1)$$

3. Ta có : $u_n=19683\Leftrightarrow 3^{\frac{n}{2}+1}=3^9\Leftrightarrow \frac{n}{2}+1=9\Leftrightarrow n=16$

Vậy số 19683 là số hạng thứ 16 của cấp số.

Bài 7.

1. Gọi CSN đó là (u_n), $n=\overline{1,7}$. Theo đề bài ta có :

$$\begin{cases}u_4=6\\u_7=243u_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1.q^3=6\\u_1.q^6=243u_1.q\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=\frac{2}{9}\\q=3\end{cases}$$

Do đó các số hạng còn lại của cấp số nhân là

$$u_1=\frac{2}{9};u_2=\frac{2}{3};u_3=2;u_5=18;u_6=54;u_7=162$$

2. Gọi ba số hạng của CSC là $a-2x;a;a+2x$ với $d=2x$

Ta có: $\begin{cases}a-2x+a+a+2x=-9\\(a-2x)^2+a^2+(a+2x)^2=29\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3\\x=\pm\frac{1}{2}\end{cases}$.

3. Gọi bốn số đó là a,b,c,d ta có hệ : $\begin{cases}a+d=37\\c+b=36\\a+c=2b\\bd=c^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=37-d\\c=36-b\\d=73-3b\\b(73-3b)=(36-b)^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow b=16,c=20,d=25,a=12$.

Bài 8.

1. Ta có: $\begin{cases}u_1+6d-u_1-2d=8\\(u_1+d)(u_1+6d)=75\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}d=2\\u_1=3,u_1=-17\end{cases}$

2. Ta có: $\begin{cases}2u_1+63d=11\\(u_1+30d)^2+(u_1+33d)^2=101\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=-89\\d=3\end{cases}$

Vậy $u_n=3(n-1)-89=3n-92$.

3. Thay công thức $S_1=\frac{n_1}{2}\left(2u_1+(n_1-1)d\right)$

$S_2=\frac{n_2}{2}\left(2u_2+(n_2-1)d\right)$; $S_3=\frac{n_3}{2}\left(2u_3+(n_3-1)d\right)$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 9.

1. Gọi q là công bội của cấp số. Khi đó ta có:

$$\begin{cases}u_2+u_3+u_4=\frac{39}{11}\\u_1+u_5=\frac{82}{11}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1\left(q+q^2+q^3\right)=\frac{39}{11}\\u_1\left(1+q^4\right)=\frac{82}{11}\end{cases}$$

Suy ra: $\frac{q^4+1}{q^3+q^2+q}=\frac{82}{39}\Leftrightarrow 39q^4-82q^3-82q^2-82q+39=0$

$\Leftrightarrow(3q-1)(q-3)(13q^2+16q+13)=0\Leftrightarrow q=\frac{1}{3},q=3$

- $q=\frac{1}{3}\Rightarrow u_1=\frac{81}{11}\Rightarrow u_n=\frac{81}{11}.\frac{1}{3^{n-1}}$

- $q=3\Rightarrow u_1=\frac{1}{11}\Rightarrow u_n=\frac{3^{n-1}}{11}$.

2. Ta có: $S_{2011}=u_1\frac{q^{2011}-1}{q-1}$

- $q=\frac{1}{3}\Rightarrow S_{2011}=\frac{243}{22}\left(1-\frac{1}{3^{2011}}\right)$
- $q=3\Rightarrow S_{2011}=\frac{1}{22}\left(3^{2011}-1\right)$

3. Với $q=3$ ta có: $u_n=\frac{3^{n-1}}{11}\in\left(\frac{1}{2};1\right)\Leftrightarrow n=3$ nên có một số hạng của dãy

Với $q=\frac{1}{3}$ ta có: $u_n=\frac{1}{11.3^{n-5}}\in\left(\frac{1}{2};1\right)\Leftrightarrow n=3$ nên có một số hạng của dãy.

Bài 10.

1. Xét dãy số $(u_n):u_k=\frac{k}{2011!}$, $k=\overline{1,2011}$

Ta có: $u_{k+1}=\frac{k+1}{2011!}=\frac{k}{2011!}+\frac{1}{2011!}=u_k+\frac{1}{2011!}$

Nên dãy (u_n) là CSC có 2011 số hạng.

Hơn nữa $u_k=\frac{1}{1.2...(k-1)(k+1)...2011}=x_{1.2...(k-1)(k+1)...2011}$

Từ đó ta có đpcm.

Vấn đề 2. Chứng minh tính chất của cấp số

Ví dụ 1. Chứng minh rằng các số:

1. $1,\sqrt{3},3$ không thể cùng thuộc một CSC;

2. $2,3,5$ không thể cùng thuộc một CSN.

Lời giải.

1. Giả sử $1,\sqrt{3},3$ là số hạng thứ m,n,p của một CSC (u_n). Ta có:

$\sqrt{3}=\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\frac{u_p-u_n}{u_n-u_m}=\frac{u_1(p-n)}{u_1(n-m)}=\frac{p-n}{n-m}$ vô lí vì $\sqrt{3}$ là số vô tỉ, còn $\frac{p-n}{n-m}$ là số hữu tỉ.

2. Giả sử $2,3,5$ là ba số hạng thứ m,n,p của CSN (v_n) có công bội q

Ta có: $\frac{2}{3}=\frac{u_m}{u_n}=q^{m-n};\frac{5}{3}=q^{p-n}$, suy ra $\left(\frac{2}{3}\right)^{p-n}=\left(\frac{5}{3}\right)^{m-n}=p^{(p-n)(m-n)}$

$\Rightarrow 2^{p-n}.3^{m-p}.5^{n-m}=1$ vô lí.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng dãy số (u_n) là:

1. CSC khi và chỉ khi $u_n=an+b$ **2.** CSN khi và chỉ khi $u_n=a.q^n$.

Lời giải.

1. Giả sử (u_n) là một CSC công sai d, khi đó :

$$u_n=u_1+(n-1)d=dn+u_1-d=an+b.$$

Giả sử: $u_n=an+b\Rightarrow u_{n+1}-u_n=a\Rightarrow u_{n+1}=u_n+a,\ \forall n$

Suy ra (u_n) là một CSC với công sai a.

2. Giả sử (u_n) là CSN với công bội q, khi đó: $u_n=u_1.q^n$

Giả sử $u_n=a.q^n$, suy ra $\frac{u_{n+1}}{u_n}=q\Rightarrow u_{n+1}=q.u_n,\ \forall n$

Suy ra dãy (u_n) là CSN với công bội q.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng :
1. Nếu phương trình $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ có ba nghiệm lập thành CSC thì $9ab = 2a^3 + 27c$
2. Nếu phương trình $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ có ba nghiệm lập thành CSN thì $c(ca^3 - b^3) = 0$

Lời giải.
1. Giả sử phương trình có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 lập thành CSC

Suy ra: $x_1 + x_3 = 2x_2$ (1)

Mặt khác: $x^3 - ax^2 + bx - c = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

$$= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3$$

Suy ra $x_1 + x_2 + x_3 = a$ (2)

Từ (1) và (2), ta suy ra $3x_2 = a$ hay $x_2 = \frac{a}{3}$

Dẫn tới phương trình đã cho có nghiệm $x_2 = \frac{a}{3}$, tức là:

$$\left(\frac{a}{3}\right)^3 - a\left(\frac{a}{3}\right)^2 + b\left(\frac{a}{3}\right) - c = 0 \Leftrightarrow -\frac{2a^3}{27} + \frac{ba}{3} - c = 0 \Leftrightarrow 9ab = 2a^3 + 27c$$

Ta có đpcm.

2. Giả sử ba nghiệm x_1, x_2, x_3 lập thành CSN, suy ra $x_1x_3 = x_2^2$

Theo phân tích bài trên, ta có: $x_1x_2x_3 = c \Rightarrow x_2^3 = c \Rightarrow x_2 = \sqrt[3]{c}$

Hay phương trình đã cho có nghiệm $x_2 = \sqrt[3]{c}$, tức là:

$$\left(\sqrt[3]{c}\right)^3 - a\left(\sqrt[3]{c}\right)^2 + b\sqrt[3]{c} - c = 0 \Leftrightarrow b\sqrt[3]{c} = a\sqrt[3]{c^2} \Leftrightarrow c(ca^3 - b^3) = 0$$

Bài toán được chứng minh.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng với mọi cách chia tập $X = \{1, 2, 3, ..., 9\}$ thành hai tập con rời nhau luôn có một tập chứa ba số lập thành cấp số cộng.

Lời giải.
Ta chứng minh bài toán bằng phương pháp phản chứng
Giả sử X được chia thành hai tập con A và B đồng thời trong A và B không có ba số nào lập thành CSC.
Xét ba CSC (1;3;5), (3;4;5), (3;5;7)
Ta thấy số 3, 5 không thể cùng nằm trong một tập hợp, vì nếu hai số này thuộc A thì 1,4,7 phải thuộc B, tuy nhiên các số 1,4,7 lại lập thành CSC.
Tương tự bằng cách xét CSC (3;5;7), (5;6;7), (5;7;9) thì ta có hai số 5,7 không thể cũng nằm trong một tập.
Vì cặp (3;5) và (5;7) hkoogn cùng thuộc một tập nên ta suy ra
(3;7) thuộc A, 5 thuộc B. Khi đó ta xét các trường hợp sau

- $4 \in A$, vì $3, 4 \in A \Rightarrow 2 \notin A \Rightarrow 2 \in B$, do 1,4,7 lập thành CSC nên $1 \in B$; 2,5,8 lập thành CSC nên $8 \in A \Rightarrow 9 \in B$

Do đó $1, 5, 9 \in B$ lập thành CSC vô lí

- $4 \in B$, do $4, 5 \in B \Rightarrow 6 \in A$ mà $6, 7 \in A \Rightarrow 8 \in B$

$5, 8 \in B \Rightarrow 2 \in A$, vì $2, 3 \in A \Rightarrow 1 \in B$, vì $1, 5 \in B \Rightarrow 9 \in A$

Do đó: $3, 6, 9 \in B$ vô lí.
Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 5. Dãy số (xn) thỏa mãn điều kiện: $\left|x_{n+m} - x_m - x_n\right| < \frac{1}{m+n}$ $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng: (xn) là một cấp số cộng.

Lời giải.

Đặt $a_n = x_n - nx_1$, khi đó ta có $a_1 = 0$ và $|a_{m+n} - a_m - a_n| < \frac{1}{m+n}, \forall m, n \in \mathbb{N}$. Ở đây ta sẽ chứng minh

$a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Thật vậy, ta có:

$\left|a_{n+1}-a_n\right|<\dfrac{1}{n+1},\forall n\in\mathbb{N}$, nên $\lim|a_{n+1}-a_n|=0$ hay $\lim|a_{n+k}-a_n|=0,\forall k\in\mathbb{N}$.

Mà $\left|a_{n+k}-a_n-a_k\right|<\dfrac{1}{n+k}$ nên $\lim\limits_{n}|a_{n+k}-a_n-a_k|=0$.

Từ đây suy ra $a_k=0,\forall k\in\mathbb{N}$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1

1. Cho ba số a,b,c lập thành cấp số cộng. Chứng minh rằng : $a^2+2bc=c^2+2ab$.

2. Cho $a,b,c>0$ lập thành cấp sô cộng.Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}.$$

3. Cho (u_n) là cấp số cộng. Chứng minh rằng :

$$u_n=\frac{1}{2}\left(u_{n-k}+u_{n+k}\right),\ 1\le k\le n-1$$

Bài 2

1. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng $\tan\dfrac{A}{2};\tan\dfrac{B}{2};$

$\tan\dfrac{C}{2}$ lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow \cos A;\cos B;\cos C$ lập thành cấp số cộng.

2. Cho tam giác ABC.Chứng minh rằng $\cot\dfrac{A}{2};\cot\dfrac{B}{2};\cot\dfrac{C}{2}$ lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow \sin A;\sin B;\sin C$ lập thành cấp số cộng.

Bài 3 Cho a,b,c lập thành cấp số nhân . .Chứng minh rằng :

1. $(a+b+c)(a-b+c)=a^2+b^2+c^2$

2. $\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)=(ab+bc)^2$

3. $(ab+bc+ca)^3=abc(a+b+c)^3$

4. $\left(a^n+b^n+c^n\right)\left(a^n-b^n+c^n\right)=a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}$; $n\in\mathbb{N}^*$

Bài 4 Cho (u_n) là cấp số nhân .Chứng minh rằng :

1. $a_1a_n=a_k.a_{n-k+1},\ k=\overline{1;n}$

2. $S_n\left(S_{3n}-S_{2n}\right)=\left(S_{2n}-S_n\right)^2$.

Bài 5

1. Điều cần và đủ để ba số khác không a,b,c là ba số hạng của một CSN là tồn tại ba số nguyên khác không p,t,r sao cho

$$\begin{cases}p+t+r=0\\ a^p.b^t.c^r=1\end{cases}.$$

2. Cho cấp số cộng (a_n) với các số hạng khác không và công sai khác không.Chứng minh rằng:

$\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+...+\dfrac{1}{a_{n-1}a_n}=\dfrac{n-1}{a_1a_n}$.

3. Cho bốn số thực $a_1;a_2;a_3;a_4$ .Biết rằng : $\begin{cases}\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}=\dfrac{2}{a_1a_3}\\ \dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+\dfrac{1}{a_3a_4}=\dfrac{3}{a_1a_4}\end{cases}$

Chứng minh rằng : $a_1;a_2;a_3;a_4$ lập thành cấp số cộng.

4. Cho a,b,c lần lượt là ba số hạng thứ m,n,p của một cấp số cộng. Chứng minh rằng :

$a.(n-p)+b.(p-m)+c.(m-n)=0$.

5. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để ba số a,b,c là ba số hạng của một CSC là tồn tại ba số nguyên khác không p,q,r thỏa: $\begin{cases} pa+qb+rc=0 \\ p+q+r=0 \end{cases}$.

6.Cho CSC (u_n) thỏa $S_m=S_n$ ($m\neq n$). Chứng minh $S_{m+n}=0$.

7. Chứng minh rằng nếu ba cạnh của tam giác lập thành CSN thì công bội của CSN đó nằm trong khoảng $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Bài 6

1. Chứng minh ba số $a,b,c>0$ là 3 số hạng liên tiếp của cấp số cộng khi và chỉ khi 3 số $a^2+ab+b^2;c^2+ca+a^2;b^2+bc+c^2$ cũng là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng.

2. Cho (u_n) là cấp số nhân. Kí hiệu $S=u_1+u_2+...+u_n$;

$T=\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+...+\frac{1}{u_n}$; $P=u_1u_2...u_n$. Hãy tính P theo S,T và n.

Bài 7 Cho hai số tự nhiên n,k thỏa $k+3\le n$.

1. Chứng minh rằng tồn tại không quá hai giá trị của k sao cho C_n^k, C_n^{k+1} và C_n^{k+2} là ba số hạng liên tiếp của một CSC.

2. Chứng minh rằng không tồn tại k để C_n^k, C_n^{k+1}, C_n^{k+2} và C_n^{k+3} là bốn số hạng liên tiếp của một CSC.

Bài 8

1. Cho (u_n) là CSC. Chứng minh rằng: $\sum_{k=0}^{n}\frac{u_{k+1}}{C_n^k}=\frac{u_1+u_{n+1}}{2}.\frac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k}$

2. Cho k là một số nguyên dương cho trước. Giả sử $s_1,s_2,s_3,...$ là một dãy tăng nghặt các số nguyên dương sao cho các dãy con $s_{s_1},s_{s_2},s_{s_3},...$ và $s_{s_1+k},s_{s_2+k},s_{s_3+k},...$ đều là cấp số cộng. Chứng minh rằng $s_1,s_2,s_3,...$ cũng là một cấp số cộng

ĐÁP ÁN

Bài 1

1. Vì a,b,c lập thành cấp số cộng nên $a+c=2b$.

Do đó : $a^2+2bc-c^2-2ab=(a-c)(a+c)-2b(a-c)$

$$=(a-c)(a+c-2b)=0$$

Suy ra $a^2+2bc=c^2+2ab$.

2. Gọi d là công sai của cấp số, suy ra $b-a=c-b=d, c-a=2d$

Do đó: $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{d}+\frac{\sqrt{c}-\sqrt{b}}{d}=\frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{d}$

$$=\frac{c-a}{d(\sqrt{c}+\sqrt{a})}=\frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}.$$

3. Gọi d là công sai của cấp số. Ta có: $\begin{cases} u_{n-k}=u_1+(n-k-1)d \\ u_{n+k}=u_1+(n+k-1)d \end{cases}$

$\Rightarrow u_{n-k}+u_{n+k}=2u_1+(2n-2)d=2u_n \Rightarrow u_n=\frac{u_{n-k}+u_{n+k}}{2}$

Bài 2

1. Ta có: $\tan\frac{A}{2};\tan\frac{B}{2};\tan\frac{C}{2}$ lập thành cấp số cộng

$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}=2\tan\frac{B}{2} \Leftrightarrow \frac{\sin(\frac{A}{2}+\frac{C}{2})}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}=2\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$

$\Leftrightarrow \cos^2\frac{B}{2} = \sin\frac{B}{2}\left[\cos\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\right)+\cos\left(\frac{A}{2}-\frac{C}{2}\right)\right]$

$\Leftrightarrow \frac{1+\cos B}{2} = \frac{1-\cos B}{2}+\frac{1}{2}\left[\cos A+\cos C\right]$

$\Leftrightarrow \cos B = \frac{\cos A+\cos C}{2} \Leftrightarrow \cos A, \cos B, \cos C$ lập thành CSC.

2. Ta có: $\cot\frac{A}{2}-\cot\frac{B}{2} = \cot\frac{B}{2}-\cot\frac{C}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}-\cos\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}} = \frac{\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{C}{2}\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{B}{2}}$

$\Leftrightarrow \sin\frac{B-A}{2}\cos\frac{B+A}{2} = \sin\frac{C-B}{2}.\cos\frac{C+B}{2}$

$\Leftrightarrow \sin B-\sin A = \sin C-\sin B \Leftrightarrow \sin A+\sin C = 2\sin B$.

Bài 3 Vì a, b, c lập thành cấp số nhân nên ta có $b^2 = ac$.

1. Ta có: $(a+b+c)(a-b+c) = (a+c)^2-b^2 = a^2+2ac+c^2-b^2$

$= a^2+2b^2+c^2-b^2 = a^2+b^2+c^2$

2. Ta có: $\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right) = \left(a^2+ac\right)\left(ac+c^2\right) = ac(a+c)^2$

$= b^2(a+c)^2 = (ab+bc)^2$.

3. $b^2 = ac$

Ta có: $(ab+bc+ca)^3 = \left(ab+bc+b^2\right)^3 = b^3(a+b+c)^3$

$= abc(a+b+c)^3$.

4. Ta có: $VT = (a^n+c^n)^2-b^{2n} = a^{2n}+c^{2n}+b^{2n}+2(a^nc^n-b^{2n})$

$= a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}$.

Bài 4 Gọi q là công bội của cấp số

1. Ta có: $a_1a_n = a_1.a_1q^{n-1} = a_1^2q^{n-1}$

$a_k.a_{n-k+1} = a_1.q^{k-1}.a_1.q^{n-k} = a_1^2.q^{n-1}$

Suy ra : $a_1a_n = a_k.a_{n-k+1}$.

2. Ta có: $S_n\left(S_{3n}-S_{2n}\right) = u_1\frac{q^n-1}{q-1}.u_1\left(\frac{q^{3n}-1}{q-1}-\frac{q^{2n}-1}{q-1}\right) = u_1^2\frac{q^{2n}(q^n-1)^2}{(q-1)^2}$

$\left(S_{2n}-S_n\right)^2 = \left(u_1\frac{q^{2n}-1}{q-1}-u_1\frac{q^n-1}{q-1}\right)^2 = u_1^2\frac{q^{2n}(q^n-1)^2}{(q-1)^2}$

Suy ra $S_n\left(S_{3n}-S_{2n}\right) = \left(S_{2n}-S_n\right)^2$.

Bài 5

1. • Giải sử a, b, c là ba số hạng thứ $k+1; l+1; m+1$ của cấp số nhân có công bội q, khi đó ta có :

$a = u_1.q^k; b = u_1.q^l; c = u_1.q^m \Rightarrow \frac{a}{b} = q^{k-l}; \frac{b}{c} = q^{l-m} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{l-m} = \left(\frac{b}{c}\right)^{k-l} \Rightarrow a^{l-m}.b^{m-l-k+l}.c^{k-l} = 1$

Đặt $p = l-m; t = m-l-k+1; r = k-1$.

Khi đó ta có ba số p, t, r thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Giả sử ta có $\begin{cases} p+t+r=0 \\ a^p.b^t.c^r=1 \end{cases} \Rightarrow a^p.c^r=b^{p+r} \Rightarrow \left(\dfrac{a}{b}\right)^p=\left(\dfrac{b}{c}\right)^r$ (*)

Do $p+t+r=0$ nên tồn tại ít nhất một số dương và một số âm.

Giải sử $r>0, t<0$. Đặt $\dfrac{b}{a}=q^r \Rightarrow b=a.q^r$ kết hợp với (*) ta có

$\left(\dfrac{a}{a.q^r}\right)^p=\left(\dfrac{a.q^r}{c}\right)^r \Rightarrow c=a.q^{r+p}$.

Vậy ba số a,b,c là ba số hạng của cấp số nhân với a là số hạng đầu,b là số hạng thứ $r+1$;c là số hạng thứ $r+p+1$.

2. Ta có $\dfrac{1}{a_ka_{k+1}}=\dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{a_k}-\dfrac{1}{a_{k+1}}\right)$

Suy ra $\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+...+\dfrac{1}{a_{n-1}a_n}=\dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_n}\right)=\dfrac{n-1}{a_1a_n}$

3. Ta có $\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}=\dfrac{2}{a_1a_3} \Leftrightarrow a_3+a_1=2a_2 \Rightarrow a_1-a_2=a_2-a_3=d$

$\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+\dfrac{1}{a_3a_4}=\dfrac{3}{a_1a_4} \Leftrightarrow \dfrac{2}{a_1a_3}+\dfrac{1}{a_3a_4}=\dfrac{3}{a_1a_4}$

$\Leftrightarrow 2a_4+a_1=3a_3 \Leftrightarrow 2a_4=3(a_1+2d)-a_1 \Rightarrow a_4=a_1+3d$.

4. Ta có: $b=a+(n-m)d;\ c=a+(p-m)d$

Suy ra $VT=a(n-p)+\left[a+(n-m)d\right](p-m)+\left[a+(p-m)d\right](m-n)$

$=d\left[(n-m)(p-m)+(p-m)(m-n)\right]=0$.

5. • Giả sử a,b,c là ba số hạng thứ $m+1, n+1, k+1$ của một CSC (u_n)

Ta có: $\begin{cases} a=u_1+md \\ b=u_1+nd \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=\dfrac{a-b}{m-n} \\ u_1=a-\dfrac{m(a-b)}{m-n}=\dfrac{mb-an}{m-n} \end{cases}$

Mặt khác: $c=u_1+kd \Rightarrow (m-n)c=mb-na+k(a-b)$

$\Rightarrow (k-n)a+(m-k)b+(n-m)c=0$

Đặt $p=k-n, q=m-k, r=n-m \Rightarrow \begin{cases} pa+qb+rc=0 \\ p+q+r=0 \end{cases}$

- Giả sử tồn tại ba số nguyên khác không p,q,r sao cho

$$\begin{cases} pa+qb+rc=0 \\ p+q+r=0 \end{cases}$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \ge b \ge c$ và $p,q,r>0$

Ta có: $p=-q-r$ nên $(-q-r)a+qb+rc=0 \Leftrightarrow (a-b)p=(c-a)r$

Đặt $d=\dfrac{a-b}{r} \Rightarrow a=b+rd, c=a+pd=b+(p+r)d$

Vậy b,a,c là ba số hạng u_1, u_r, u_{p+r} của một CSC.

6. Ta có $S_m=S_n \Leftrightarrow 2u_1(m-n)+(m^2-n^2)d-(m-n)d=0$

$\Leftrightarrow 2u_1+(m+n-1)d=0$

Suy ra $S_{m+n}=\dfrac{n+m}{2}\left[2u_1+(m+n-1)d\right]=0$.

7. Giả sử a,b,c là ba cạnh tam giác theo thứ tự đó lập thành CSN với công bội q.

Ta có: $\begin{cases} a+aq>aq^2 \\ aq^2+aq>a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^2-q-1<0 \\ q^2+q-1>0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q\in\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \\ q\in\left(-\infty;\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow q\in\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2};\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right).$$

Bài 6

1. Ta có: $a^2+ab+b^2+b^2+bc+c^2=2(a^2+ca+c^2)$

$\Leftrightarrow 2b^2+ab+bc=a^2+2ac+c^2 \Leftrightarrow b(a+b+c)+b^2-(a+c)^2=0$

$\Leftrightarrow b(a+b+c)+(a+b+c)(b-a-c)=0$

$\Leftrightarrow 2b-a-c=0 \Leftrightarrow 2b=a+c$.

2. Ta có: $S=u_1\dfrac{q^n-1}{q-1}$; $T=\dfrac{1}{u_1}\dfrac{\left(\dfrac{1}{q}\right)^n-1}{\dfrac{1}{q}-1}=\dfrac{1}{u_1}\dfrac{q^n-1}{q^{n-1}(q-1)}$

$P=u_1^n q^{1+2+...+n-1}=u_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Suy ra: $P=\sqrt{\left(\dfrac{S}{T}\right)^n}$

Bài 7

1. Ta có: $C_n^k+C_n^{k+2}=2C_n^{k+1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{n!}{k!(n-k)!}+\dfrac{n!}{(k+2)!(n-k-2)!}=2\dfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$

$\Leftrightarrow (k+1)(k+2)+(n-k)(n-k-1)=2(k+2)(n-k)$

Đây là phương trình bậc hai ẩn k nên có nhiều nhất hai nghiệm.

2. Giả sử tồn tại k để C_n^k, C_n^{k+1}, C_n^{k+2} và C_n^{k+3} là bốn số hạng liên tiếp của một CSC.

Do $C_n^k=C_n^{n-k}$ nên suy ra: $C_n^{n-k},C_n^{n-k-1},C_n^{n-k-2},C_n^{n-k-3}$ cũng tạo thành bốn số hạng liên tiếp của một CSC.

Vậy ta có các bộ sau là ba số hạng liên tiếp của một CSC:

$C_n^k,C_n^{k+1},C_n^{k+2}$

$C_n^k,\ C_n^{k+1},C_n^{k+2},C_n^{k+3}$

$C_n^{n-k-3},C_n^{n-k-2},C_n^{n-k-1}$

$C_n^{n-k-2},C_n^{n-k-1},C_n^{n-k}$

Ta chứng minh tập $\{k,k+1,n-k-3,n-k-2\}$ chứa không quá hai số khác nhau. Thật vậy, giả sử $k,k+1,n-k-3$ là ba số khác nhau.

Khi đó, tồn tại ba CSC: $C_n^k,C_n^{k+1},C_n^{k+2}$

$C_n^{k+1},C_n^{k+2},C_n^{k+3}$

$C_n^{n-k-3},C_n^{n-k-2},C_n^{n-k-1}$

Điều này trái với kết quả câu 1)

Do $k,k+1$ và $k-k-3,n-k-2$ là các số tự nhiên liên tiếp nên ta có: $\begin{cases} k=n-k-3 \\ k+1=n-k-2 \end{cases} \Rightarrow C_n^{k+1}=C_n^{n-k-2}=C_n^{k+2}$

Suy ra $C_n^k=C_n^{k+1}=C_n^{k+2}$ (1).

Xét phương trình : $C_n^k=C_n^{k+1}$ (2)

$\Leftrightarrow \frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \Leftrightarrow k+1=n-k \Rightarrow k=\frac{n-1}{2}$

Suy ra phương trình (2) có không quá một nghiệm k, điều này dẫn tới (1) mâu thuẫn.

Vậy không tồn tại k để C_n^k, C_n^{k+1}, C_n^{k+2} và C_n^{k+3} là bốn số hạng liên tiếp của một CSC.

Bài 8

1. Ta có $\begin{cases} u_1+u_{n+1}=u_{k+1}+u_{n-k+1} \\ C_n^k=C_n^{n-k} \end{cases}$, $\forall k=0,1,2,...,n$

Nên $2\sum_{k=0}^{n}\frac{u_{k+1}}{C_n^k}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{u_{k+1}}{C_n^k}+\frac{u_{n-k+1}}{C_n^{n-k}}\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{u_{k+1}+u_{n-k+1}}{C_n^k}=(u_1+u_{n+1})\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{C_n^k}$

Do đó, để chứng minh đẳng thức đã cho ta chỉ cần chứng minh

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{C_n^k}=\frac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k} \quad (1).$$

Ta chứng minh (1) bằng quy nạp

- Với $n=1$ ta có: $VT(1)=\frac{1}{C_1^0}+\frac{1}{C_1^1}=2$ và $VP(1)=\frac{2}{4}\left(2+2\right)=2$

Nên (1) đúng với $n=1$.

- Giả sử $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{C_n^k}=\frac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k}$, ta chứng minh $\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{C_{n+1}^k}=\frac{n+2}{2^{n+2}}\sum_{k=1}^{n+2}\frac{2^k}{k}$ (2)

Thật vậy: $\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{C_{n+1}^k}=\frac{1}{C_{n+1}^0}+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{C_{n+1}^{k+1}}=1+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{C_{n+1}^{k+1}}$

Mà $C_{n+1}^{k+1}=\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}=\frac{n+1}{k+1}C_n^k$

Suy ra $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{C_{n+1}^{k+1}}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{k+1}{C_n^k}=\frac{1}{2(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k+1}{C_n^k}+\frac{n-k+1}{C_n^{n-k}}\right)$

$$=\frac{n+2}{2(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{C_n^k}=\frac{n+2}{2(n+1)}\frac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k}=\frac{n+2}{2^{n+2}}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k}$$

Suy ra $\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{C_{n+1}^k}=1+\frac{n+2}{2^{n+2}}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k}=\frac{n+2}{2^{n+2}}\sum_{k=1}^{n+2}\frac{2^k}{k}$ dẫn tới (2) được chứng minh

2. Gọi p và q lần lượt là công sai của các cấp số cộng $s_{s_1},s_{s_2},s_{s_3},...$ và $s_{s_1+k},s_{s_2+k},s_{s_3+k},...$. Đặt $a=s_{s_1}-p$ và $b=s_{s_1+k}-q$.

Theo công thức tính số hạng tổng quát của một cấp số cộng và với số nguyên dương n ta có:

$$s_{s_n}=s_{s_1}+(n-1)p=a+np,\ s_{s_n+k}=s_{s_1+k}+(n-1)q=b+nq.$$

Từ dãy $s_1,s_2,s_3,...$ là một dãy tăng ngặt, nên với mọi số nguyên dương n và với chú ý $s_n+k\le s_{n+k}$ ta có

$s_{s_n}+k-1<s_{s_n+k}\le s_{s_{n+k}}$,

từ đó ta thu được $a+np+k-1<b+nq\le a+(n+1)p$,

điều này tương đương với $0<k-1+b-a+n(q-p)\le kp$,

nếu $p\ne q$ thì ta thấy bất đẳng thức trên mâu thuẫn khi cho n cằng lớn. Nên suy ra $p=q$ và do đó $0\le k-1+b-a\le kp$ (1)

Đặt $m=\min\{s_{n+1}-s_n:n=1,2,...\}$.

Khi đó $b-a=(s_{s_1+k}-q)-(s_{s_1}-p)=s_{s_1+k}-s_{s_1}\ge km$ (2) và

$kp=a+(s_1+k)p-(a+s_1p)=s_{s_{s_1+k}}-s_{s_{s_1}}=s_{b+p}-s_{a+q}\ge m(b-a)$ (3)

Ta xét hai trường hợp:

- $b-a=kp$.

Khi đó, với mỗi số nguyên dương n, $s_{s_n+k}=b+np=a+(n+k)p=s_{s_{n+k}}$, từ đây kết hợp với dãy $s_1,s_2,s_3,...$ là một dãy tăng ngặt ta có $s_{n+k}=s_n+k$.

Mặt khác do $s_n<s_{n+1}<...<s_{n+k}=s_n+k$ nên $s_{n+1}=s_n+1$ và do đó $s_1,s_2,s_3,...$ là một cấp số cộng với công sai bằng 1.

- $b-a<kp$.

Chọn số nguyên dương N sao cho $s_{N+1}-s_N=m$. Khi đó

$$\begin{aligned} m(a-b+p-k) &= m((a+(N+1)p)-(b+Np+k)) \\ &\le s_{a+(N+1)p}-s_{b+Np+k}=s_{s_{s_{N+1}}}-s_{s_{s_N+k}+k} \\ &= (a+s_{N+1}p)-(b+(s_N+k)p)=(s_{N+1}-s_N)p+a-b-kp \\ &= mp+a-b-kp, \end{aligned}$$

do vậy: $(b-a-km)+(kp-m(b-a))\le 0.$ (4)

Từ các bất đẳng thức (2), (3) và (4) ta thu được các đẳng thức sau:

$b-a=km$ và $kp=m(b-a)$.

Giả sử tồn tại số nguyên dương n sao cho $s_{n+1}>s_n+m$. Khi đó

$$\begin{aligned} m(m+1)\le m(s_{n+1}-s_n)\le s_{s_{n+1}}-s_{s_n} &= (a+(n+1)p)-(a+np) \\ &= p=\frac{m(b-a)}{k}=m^2, \text{ vô lý.} \end{aligned}$$

Vì vậy điều giả sử là sai nên $s_{n+1}=s_n+m$ với mọi $n\in\mathbb{N}$ hay dãy $s_1,s_2,s_3,...$ là một cấp số cộng có công sai bằng m.

Vấn đề 3. Tìm điều kiện để dãy số lập thành cấp số

Ví dụ 1. Tìm x biết :

1. $x^2+1,x-2,1-3x$ lập thành cấp số cộng ;

2. $1,x^2,6-x^2$ lập thành cấp số nhân.

Lời giải.

1. Ta có: $x^2+1,x-2,1-3x$ lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow x^2+1+1-3x=2(x-2)\Leftrightarrow x^2-5x+6=0\Leftrightarrow x=2;x=3$

Vậy $x=2,x=3$ là những giá trị cần tìm.

2. Ta có: $1,x^2,6-x^2$ lập thành cấp số nhân $\Leftrightarrow x^4=6-x^2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$.

Ví dụ 2. Cho các số $5x-y,\ 2x+3y,\ x+2y$ lập thành cấp số cộng ; các số $(y+1)^2,xy+1,(x-1)^2$ lập thành cấp số nhân.Tính x,y

Lời giải.

Ta có các số $5x-y,\ 2x+3y,\ x+2y$ lập thành CSC nên suy ra $2(2x+3y)=5x-y+x+2y$ hay $2x=5y$ (1)

Các số $(y+1)^2,xy+1,(x-1)^2$ lập thành CSN suy ra

$(xy+1)^2=(y+1)^2(x-1)^2\Leftrightarrow(4+2y-2x)(4xy+2x-2y)=0$ (2)

Thay (1) vào (2) ta được : $(4+2y-5y)(10y^2+5y-2y)=0$

$\Leftrightarrow y(4-3y)(10y+3)=0\Leftrightarrow y=0,y=\frac{4}{3},y=-\frac{3}{10}$.

Vậy $(x;y)=(0;0);\left(\frac{10}{3};\frac{4}{3}\right);\left(-\frac{3}{4};-\frac{3}{10}\right)$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Tìm x để các số sau lập thành cấp số cộng

1. $1;x;x^3$ **2.** $1;\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right);4\sin x$

Bài 2. Tìm x, y biết:

1. Các số $x+5y, 5x+2y, 8x+y$ lập thành cấp số cộng và các số $(y-1)^2, xy-1, (x+1)^2$ lập thành cấp số nhân.

2. Các số $x+6y, 5x+2y, 8x+y$ lập thành cấp số cộng và các số $x+\frac{5}{3}y, y-1, 2x-3y$ lập thành cấp số nhân.

Bài 3. Xác định a, b để phương trình $x^3+ax+b=0$ có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

Bài 4 Tìm m để phương trình:

1. $mx^4-2(m-1)x^2+m-1=0$ có bốn nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

2. $x^3-3mx^2+4mx+m-2=0$ có ba nghiệm lập thành cấp số nhân

Bài 5 Xác định m để:

1. Phương trình $x^3-3x^2-9x+m=0$ có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

2. Phương trình $x^4-2(m+1)x^2+2m+1=0$ (1) có bốn nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

3. Phương trình $x^3+2x^2+(m+1)x+2(m+1)=0$ có ba nghiệm lập thành cấp số nhân.

ĐÁP ÁN

Bài 2

1 Ta có hệ: $\begin{cases} x+5y+8x+y=2(5x+2y) \\ (x+1)^2(y-1)^2=(xy-1)^2 \end{cases}$ giải hệ này ta tìm được

$(x;y)=\left(-\sqrt{3};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right);\left(\sqrt{3};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2. Ta có hệ: $\begin{cases} x+6y+8x+y=2(5x+2y) \\ (x+\frac{5}{3}y)(2x-3y)=(y-1)^2 \end{cases}$ giải hệ này ta tìm được

$(x;y)=(-3;-1);\left(\frac{3}{8};\frac{1}{8}\right)$.

Bài 3 Đáp số: $b=0, a<0$. Khi đó phương trình có ba nghiệm lập thành CSC là $x=0, x=\pm\sqrt{-a}$.

Bài 4.

1. Đáp số : $m=-\frac{9}{16}$

2. Giả sử phương trình có ba nghiệm a, b, c lập thành CSN

Suy ra $\begin{cases} abc=2-m \\ b^2=ac \end{cases} \Rightarrow m=2-b^3$ thay vào phương trình ta có

$(3b-4)(b^3-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=\frac{4}{3} \Rightarrow m=-\frac{10}{27} \\ b=\sqrt[3]{2} \Rightarrow m=0 \end{array}\right.$

Thay ngược lại ta thấy không có giá trị nào của m thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 5:

1. Giải sử phương trình có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

Khi đó: $x_1+x_3=2x_2, x_1+x_2+x_3=3 \Rightarrow x_2=1$

Thay vào phương trình ta có : $m=11$.

Với $m=11$ ta có phương trình : $x^3-3x^2-9x+11=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x-11)=0 \Leftrightarrow x_1=1-\sqrt{12}, x_2=1, x_3=1+\sqrt{12}$

Ba nghiệm này lập thành CSC.

Vậy $m=11$ là giá trị cần tìm.

2. Đặt $t = x^2, t \ge 0$.

Phương trình trở thành: $t^2 - 2(m+1)t + 2m + 1 = 0$ (2)

Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi PT (2) có hai nghiệm dương phân biệt $t_2 > t_1 > 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - (2m+1) > 0 \\ 2m+1 > 0 \\ 2(m+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m \ne 0$$

Khi đó PT(2) có bốn nghiệm là: $-\sqrt{t_2}; -\sqrt{t_1}; \sqrt{t_1}; \sqrt{t_2}$

Bốn nghiệm này lập thành cấp số cộng khi :

$$\begin{cases} -\sqrt{t_2} + \sqrt{t_1} = -2\sqrt{t_1} \\ -\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} = 2\sqrt{t_1} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1$$

Theo định lý viet thì : $\begin{cases} t_1 + t_2 = 2(m+1) \\ t_1 t_2 = 2m+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + 9t_1 = 2(m+1) \\ t_1 9t_1 = 2m+1 \end{cases} \Rightarrow 9m^2 - 32m - 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = -\frac{4}{9} \end{array} \right.$.

Vậy $m = 4$ hoặc $m = -\frac{4}{9}$ là những giá trị cần tìm.

3. Giả sử phương trình có ba nghiệm phân biệt lập thành CSN,khi đó :

$$\begin{cases} x_1x_3 = x_2^2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = m+1 \end{cases} \Rightarrow x_2 = -\frac{m+1}{2}$$

thay vào phương trình ta có : $m = -1, m = 3, m = -4$.

Bằng cách thay từng giá trị của m vào phương trình ta thấy không có giá trị nào của m thỏa yêu cầu bài toán.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

PHẦN 1. CẤP SỐ CỘNG

Câu 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số cộng?

A. $1;-3;-7;-11;-15;\cdots$ **B.** $1;-3;-6;-9;-12;\cdots$

C. $1;-2;-4;-6;-8;\cdots$ **D.** $1;-3;-5;-7;-9;\cdots$

Lời giải. Ta lần lượt kiểm tra: $u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 = \cdots ?$

Xét đáp án A: $1;-3;-7;-11;-15;\cdots \longrightarrow u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 = \cdots \longrightarrow$ **Chọn A.**

Xét đáp án B: $1;-3;-6;-9;-12;\cdots \longrightarrow u_2 - u_1 = -4 \ne -3 = u_3 - u_2 \longrightarrow$ loại B.

Xét đáp án C: $1;-2;-4;-6;-8;\cdots \longrightarrow u_2 - u_1 = -3 \ne -2 = u_3 - u_2 \longrightarrow$ loại C.

Xét đáp án D: $1;-3;-5;-7;-9;\cdots \longrightarrow u_2 - u_1 = -4 \ne -2 = u_3 - u_2 \longrightarrow$ loại D.

Câu 2. Dãy số nào sau đây không phải là cấp số cộng?

A. $-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};0;\frac{1}{3};\frac{2}{3};1;\frac{4}{3};\ldots$ **B.** $15\sqrt{2};12\sqrt{2};9\sqrt{2};6\sqrt{2};\ldots$

C. $\frac{4}{5};1;\frac{7}{5};\frac{9}{5};\frac{11}{5};\ldots$ **D.** $\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{2\sqrt{3}}{3};\sqrt{3};\frac{4\sqrt{3}}{3};\frac{5}{\sqrt{3}};\ldots$

Lời giải. Chỉ cần tồn tại hai cặp số hạng liên tiếp của dãy số có hiệu khác nhau: $u_{m+1}-u_m \neq u_{k+1}-u_k$ thì ta kết luận ngay dãy số đó không phải là cấp số cộng.

Xét đáp án A: $-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};0;\frac{1}{3};\frac{2}{3};1;\frac{4}{3}.... \longrightarrow \frac{1}{3}=u_2-u_1=u_3-u_2=u_4-u_3=\cdots \longrightarrow$ loại A.

Xét đáp án B:

$$15\sqrt{2};12\sqrt{2};9\sqrt{2};6\sqrt{2};.... \longrightarrow -3\sqrt{3}=u_2-u_1=u_3-u_2=u_4-u_3=\cdots \longrightarrow \text{loại B.}$$

Xét đáp án C: $\frac{4}{5};1;\frac{7}{5};\frac{9}{5};\frac{11}{5};.... \longrightarrow \frac{1}{5}=u_2-u_1 \neq u_3-u_2=\frac{2}{5} \longrightarrow$ **Chọn C.**

Xét đáp án D: $\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{2\sqrt{3}}{3};\sqrt{3};\frac{4\sqrt{3}}{3};\frac{5}{\sqrt{3}};... \longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}=u_2-u_1=u_3-u_2=u_4-u_3 \longrightarrow$ loại D.

Câu 3. Cho dãy số $\frac{1}{2};0;-\frac{1}{2};-1;-\frac{3}{2};.....$ là cấp số cộng với:

A. Số hạng đầu tiên là $\frac{1}{2}$, công sai là $\frac{1}{2}$.

B. Số hạng đầu tiên là $\frac{1}{2}$, công sai là $-\frac{1}{2}$.

C. Số hạng đầu tiên là 0, công sai là $\frac{1}{2}$.

D. Số hạng đầu tiên là 0, công sai là $-\frac{1}{2}$.

Lời giải: Nếu dãy số (u_n) là một cấp số cộng thị công sai d của nó là hiệu của một cặp số hạng liên tiếp bất kì (số hạng sau trừ cho số hạng trước) của dãy số đó.

Ta có $\frac{1}{2};0;-\frac{1}{2};-1;-\frac{3}{2};.....$ là cấp số cộng $\longrightarrow \begin{cases} u_1=\frac{1}{2} \\ u_2-u_1=-\frac{1}{2}=d \end{cases} \longrightarrow$ **Chọn B.**

Câu 4. Cho cấp số cộng có số hạng đầu $u_1=-\frac{1}{2},$ công sai $d=\frac{1}{2}.$ Năm số hạng liên tiếp đầu tiên của cấp số này là:

A. $-\frac{1}{2};0;1;\frac{1}{2};1.$ **B.** $-\frac{1}{2};0;\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}.$ **C.** $\frac{1}{2};1;\frac{3}{2};2;\frac{5}{2}.$ **D.** $-\frac{1}{2};0;\frac{1}{2};1;\frac{3}{2}.$

Lời giải: Ta dùng công thức tổng quát $u_n=u_1+(n-1)d=-\frac{1}{2}+(n-1)\frac{1}{2}=-1+\frac{n}{2}$, hoặc $u_{n+1}=u_n+d=u_n+\frac{1}{2}$ để tính các số hạng của một cấp số cộng.

Ta có $u_1 = -\frac{1}{2};\ d = \frac{1}{2} \longrightarrow \begin{cases} u_1 = -\frac{1}{2} \\ u_2 = u_1 + d = 0 \\ u_3 - u_2 + d = \frac{1}{2} \\ u_4 = u_3 + d = 1 \\ u_5 = u_4 + d = \frac{3}{2} \end{cases} \longrightarrow$ **Chọn D.**

Nhận xét: Dùng chức năng "lặp" của MTCT để tính:

Nhập: $X = X + \frac{1}{2}$ (nhập $X = X + d$).

Bấm CALC: nhập $-\frac{1}{2}$ (nhập u_1).

Để tính 5 số hạng đầu ta bấm dấu "=" liên tiếp để ra kết quả 4 lần nữa!

Câu 5. Viết ba số hạng xen giữa các số 2 và 22 để được một cấp số cộng có năm số hạng.

A. 7; 12; 17, **B.** 6; 10; 14. **C.** 8; 13; 18. **D.** 6; 12; 18.

Lời giải. Giữa 2 và 22 có thêm ba số hạng nữa lập thành cấp số cộng, xem như ta có một cấp số cộng có 5 số hạng với $u_1 = 2;\ u_5 = 22;$ ta cần tìm $u_2,\ u_3,\ u_4.$

Ta có $u_5 = u_1 + 4d \Leftrightarrow d = \frac{u_5 - u_1}{4} = \frac{22-2}{4} = 5 \longrightarrow \begin{cases} u_2 = u_1 + d = 7 \\ u_3 = u_1 + 2d = 12 \\ u_4 = u_1 + 3d = 17 \end{cases} \longrightarrow$ **Chọn A.**

Câu 6. Cho hai số -3 và $23.$ Xen kẽ giữa hai số đã cho n số hạng để tất cả các số đó tạo thành cấp số cộng có công sai $d = 2.$ Tìm $n.$

A. $n = 12.$ **B.** $n = 13.$ **C.** $n = 14.$ **D.** $n = 15.$

Lời giải. Theo giả thiết thì ta được một cấp số cộng có $n+2$ số hạng với $u_1 = -3,\ u_{n+2} = 23.$

Khi đó $u_{n+2} = u_1 + (n+1)d \Leftrightarrow n+1 = \frac{u_{n+2} - u_1}{d} = \frac{23-(-3)}{2} = 13 \Leftrightarrow n = 12 \longrightarrow$ **Chọn A.**

Câu 7. Cho các số $-4;\ 1;\ 6;\ x$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tìm $x.$

A. $x = 7.$ **B.** $x = 10.$ **C.** $x = 11.$ **D.** $x = 12.$

Lời giải. Vì các số $-4;\ 1;\ 6;\ x$ theo thứ tự $u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4$ lập thành cấp số cộng nên

$u_4 - u_3 = u_3 - u_2 \longrightarrow x - 6 = 6 - 1 \Leftrightarrow x = 11 \longrightarrow$ **Chọn C.**

Câu 8. Biết các số $C_n^1;\ C_n^2;\ C_n^3$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với $n > 3.$ Tìm $n.$

A. $n = 5.$ **B.** $n = 7.$ **C.** $n = 9.$ **D.** $n = 11.$

Lời giải. Ba số $C_n^1;\ C_n^2;\ C_n^3$ theo thứ tự $u_1,\ u_2,\ u_3$ lập thành cấp số cộng nên

$u_1+u_3=2u_2 \Leftrightarrow C_n^1+C_n^3=2C_n^2\ (n\ge 3) \Leftrightarrow n+\frac{(n-2)(n-1)n}{6}=2.\frac{(n-1)n}{2}$

$\Leftrightarrow 1+\frac{n^2-3n+2}{6}=n-1 \Leftrightarrow n^2-9n+14 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=2 \\ n=7 \end{array}\right. \Leftrightarrow n=7\,(n\ge 3)$. **Chọn B.**

Nhận xét: Nếu $u_{k-1},\, u_k,\, u_{k+1}$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng thì ta có $u_{k-1}+u_{k+1}=2u_k$.

Câu 9. Nếu các số $5+m;\ 7+2m;\ 17+m$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì m bằng bao nhiêu?

A. $m=2.$ **B.** $m=3.$ **C.** $m=4.$ **D.** $m=5.$

Lời giải. Ba số $5+m;\ 7+2m;\ 17+m$ theo thứ tự $u_1,\, u_2,\, u_3$ lập thành cấp số cộng nên

$u_1+u_3=2u_2 \Leftrightarrow (5+m)+(17+m)=2(7+2m) \Leftrightarrow m=4 \longrightarrow$ **Chọn C.**

Nhận xét: Ta có thể dùng tính chất $u_3-u_2=u_2=u_1$.

Câu 10. Với giá trị nào của x và y thì các số $-7;\ x;\ 11;\ y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số công?

A. $x=1; y=21.$ **B.** $x=2; y=20.$ **C.** $x=3; y-19.$ **D.** $x=4; y=18.$

Lời giải. Bốn số $-7;\ x;\ 11;\ y$ theo thứ tự $u_1,\, u_2,\, u_3,\, u_4$ lập thành cấp số cộng nên

$\begin{cases} u_4-u_3=u_3-u_2 \\ u_4-u_3=u_2-u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-11=11-x \\ y-11=x+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=22 \\ x-y=-18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=20 \end{cases} \longrightarrow$ **Chọn B.**

Câu 11. Cho cấp số cộng (u_n) có các số hạng đầu lần lượt là $5;\ 9;\ 13;\ 17;\ \cdots$. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng.

A. $u_n=5n+1.$ **B.** $u_n=5n-1.$ **C.** $u_n=4n+1.$ **D.** $u_n=4n-1.$

Lời giải. Các số $5;\ 9;\ 13;\ 17;\ \cdots$ theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng (u_n) nên

$\begin{cases} u_1=5 \\ d=u_2-u_1=4 \end{cases} \xrightarrow{CTTQ} u_n=u_1+(n-1)d=5+4(n-1)=4n+1 \longrightarrow$ **Chọn C.**

Câu 12. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=-3$ và $d=\frac{1}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $u_n=-3+\frac{1}{2}(n+1).$ **B.** $u_n=-3+\frac{1}{2}n-1.$

C. $u_n=-3+\frac{1}{2}(n-1).$ **D.** $u_n=-3+\frac{1}{4}(n-1).$

Lời giải. Ta có $\begin{cases} u_1=-3 \\ d=\frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{CTTQ} u_n=u_1+(n-1)d=-3+\frac{1}{2}(n-1) \longrightarrow$ **Chọn C.**

Câu 13. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3=15$ và $d=-2$. Tìm u_n.

A. $u_n=-2n+21.$ **B.** $u_n=-\frac{3}{2}n+12.$ **C.** $u_n=-3n-17.$ **D.** $u_n=\frac{3}{2}n^2-4.$

Lời giải. Ta có $\begin{cases}15=u_3=u_1+2d\\ d=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=19\\ d=-2\end{cases}\to u_n=u_1+(n-1)d=-2n+21.$ **Chọn A.**

Câu 14. Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng?

A. $u_n=7-3n.$ **B.** $u_n=7-3^n.$ **C.** $u_n=\dfrac{7}{3n}.$ **D.** $u_n=7.3^n.$

Lời giải. Dãy (u_n) là cấp số cộng $\Leftrightarrow u_n=an+b$ (a,b là hằng số). **Chọn A.**

Câu 15. Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng?

A. $u_n=(-1)^n(2n+1).$ **B.** $u_n=\sin\dfrac{\pi}{n}.$

C. $\begin{cases}u_1=1\\ u_n=u_{n-1}-1\end{cases}.$ **D.** $\begin{cases}u_1=1\\ u_n=2u_{n-1}\end{cases}.$

Lời giải. Dãy (u_n) là một cấp số cộng $\Leftrightarrow u_n=u_{n-1}+d$ (d là hằng số). **Chọn C.**

Câu 16. Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào không phải là cấp số cộng?

A. $u_n=-4n+9.$ **B.** $u_n=-2n+19.$ **C.** $u_n=-2n-21.$ **D.** $u_n=-2^n+15.$

Lời giải. Dãy số $u_n=-2^n+15$ không có dạng $an+b$ nên có không phải là cấp số cộng.

Chọn D.

Câu 17. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=-5$ và $d=3.$ Số 100 là số hạng thứ mấy của cấp số cộng?

A. Thứ 15. **B.** Thứ 20. **C.** Thứ 35. **D.** Thứ 36.

Lời giải. $\begin{cases}u_1=-5\\ d=3\end{cases}\xrightarrow{n\leftrightarrow u_n=100}100=u_n=u_1+(n-1)d=3n-8\Leftrightarrow n=36\longrightarrow$ **Chọn D.**

Câu 18. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=-5$ và $d=3.$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $u_{15}=34.$ **B.** $u_{15}=45.$ **C.** $u_{13}=31.$ **D.** $u_{10}=35.$

Lời giải. $\begin{cases}u_1=-5\\ d=3\end{cases}\longrightarrow u_n=3n-8\longrightarrow\begin{cases}u_{15}=37\\ u_{13}=31\\ u_{10}=22\end{cases}\longrightarrow$ **Chọn C.**

Câu 19. Một cấp số cộng có 8 số hạng. Số hạng đầu là 5, số hạng thứ tám là 40. Khi đó công sai d của cấp số cộng đó là bao nhiêu?

A. $d=4.$ **B.** $d=5.$ **C.** $d=6.$ **D.** $d=7.$

Lời giải. $\begin{cases}u_1=5\\ 40=u_8=u_1+7d\end{cases}\longrightarrow d=5\longrightarrow$ **Chọn B.**

Câu 20. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=4$ và $d=-5.$ Tính tổng 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng.

A. $S_{100}=24350.$ **B.** $S_{100}=-24350.$ **C.** $S_{100}=-24600.$ **D.** $S_{100}=24600.$

Lời giải. $S_n=nu_1+\frac{n(n-1)}{2}d\longrightarrow S_{100}=100u_1+\frac{100.99}{2}d=-24350\longrightarrow$ **Chọn B.**

Câu 21. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=\frac{1}{4}$ và $d=-\frac{1}{4}.$ Gọi S_5 là tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_5=-\frac{5}{4}.$ **B.** $S_5=\frac{4}{5}.$ **C.** $S_5=\frac{5}{4}.$ **D.** $S_5=-\frac{4}{5}.$

Lời giải. $\begin{cases}u_1=\frac{1}{4}\\ d=-\frac{1}{5}\end{cases}\longrightarrow S_5=5u_1+\frac{5.4}{2}d=5.\frac{1}{4}+10.\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{5}{4}\longrightarrow$ **Chọn A.**

Câu 22. Số hạng tổng quát của một cấp số cộng là $u_n=3n+4$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Gọi S_n là tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n=\frac{3^n-1}{2}.$ **B.** $S_n=\frac{7(3^n-1)}{2}.$ **C.** $S_n=\frac{3n^2+5n}{2}.$ **D.** $S_n=\frac{3n^2+11n}{2}.$

Lời giải. Cấp số cộng $u_n=an+b\longrightarrow\begin{cases}u_1=a+b\\ d=a\end{cases}.$

$u_n=3n+4\rightarrow\begin{cases}u_1=7\\ d=3\end{cases}\rightarrow S_n=nu_1+\frac{n(n-1)}{2}d=7n+\frac{3(n^2-n)}{2}=\frac{3n^2+11n}{2}.$ **Chọn D.**

Câu 23. Xét các số nguyên dương chia hết cho $3.$ Tổng số 50 số nguyên dương đầu tiên đó bằng:

A. 7650. **B.** 7500. **C.** 3900. **D.** 3825.

Lời giải. Số nguyên dương chia hết cho 3 có dạng $3n\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ nên chúng lập thành cấp số cộng $u_n=3n\longrightarrow\begin{cases}u_1=3\\ u_{50}=150\end{cases}\longrightarrow S_{50}=\frac{50}{2}(u_1+u_{50})=3825\longrightarrow$ **Chọn D.**

Chú ý: $S_n=\frac{n}{2}(u_1+u_n)=nu_1+\frac{n(n-1)}{2}d.$

Câu 24. Cho cấp số cộng (u_n) có $d=-2$ và $S_8=72.$ Tìm số hạng đầu tiên $u_1.$

A. $u_1=16.$ **B.** $u_1=-16.$ **C.** $u_1=\frac{1}{16}.$ **D.** $u_1=-\frac{1}{16}.$

Lời giải. $\begin{cases}d=-2\\ 72=S_8=8u_1+\frac{8.7}{2}d\end{cases}\longrightarrow 72=8u_1+28.(-2)\Leftrightarrow u_1=16\longrightarrow$ **Chọn A.**

Câu 25. Một cấp số cộng có số hạng đầu là 1, công sai là 4, tổng của n số hạng đầu là 561. Khi đó số hạng thứ n của cấp số cộng đó là u_n có giá trị là bao nhiêu?

A. $u_n=57.$ **B.** $u_n=61.$ **C.** $u_n=65.$ **D.** $u_n=69.$

Lời giải. $\begin{cases} u_1 = 1,\ d = 4 \\ 561 = S_n = nu_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d \end{cases} \longrightarrow 561 = n + \dfrac{n^2-n}{2}.4 \Leftrightarrow 2n^2 - n - 561 = 0 \Leftrightarrow n = 17.$

$u_n = u_{17} = u_1 + 16d = 1 + 16.4 = 65 \longrightarrow$ **Chọn C.**

Câu 26. Một cấp số cộng có 12 số hạng. Biết rằng tổng của 12 số hạng đó bằng 144 và số hạng thứ mười hai bằng 23. Khi đó công sai d của cấp số cộng đã cho là bao nhiêu?

A. $d = 2.$ **B.** $d = 3.$ **C.** $d = 4.$ **D.** $d = 5.$

Lời giải. $\begin{cases} u_{12} = 23 \\ S_{12} = 144 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u_1 + 11d = 23 \\ \dfrac{12}{2}(u_1 + u_{12}) = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = \dfrac{23 - u_1}{11} = 2 \end{cases} \longrightarrow$ **Chọn A.**

Câu 27. Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng là $S_n = \dfrac{3n^2 - 19n}{4}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng đầu tiên u_1 và công sai d của cấp số cộng đã cho.

A. $u_1 = 2;\ d = -\dfrac{1}{2}.$ **B.** $u_1 = -4;\ d = \dfrac{3}{2}.$

C. $u_1 = -\dfrac{3}{2};\ d = -2.$ **D.** $u_1 = \dfrac{5}{2};\ d = \dfrac{1}{2}.$

Lời giải. Ta có $\dfrac{3n^2 - 19n}{4} = \dfrac{3}{4}n^2 - \dfrac{19}{4}n = S_n = nu_1 + \dfrac{n^2 - n}{2}d = \dfrac{d}{2}n^2 + \left(u_1 - \dfrac{d}{2}\right)n$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{2} = \dfrac{3}{4} \\ u_1 - \dfrac{d}{2} = -\dfrac{19}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -4 \\ d = \dfrac{3}{2} \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 28. Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng là $S_n = n^2 + 4n$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng đã cho.

A. $u_n = 2n + 3.$ **B.** $u_n = 3n + 2.$ **C.** $u_n = 5.3^{n-1}.$ **D.** $u_n = 5.\left(\dfrac{8}{5}\right)^{n-1}.$

Lời giải. Ta có $n^2 + 4n = S_n = \dfrac{d}{2}n^2 + \left(u_1 - \dfrac{d}{2}\right)n \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{2} = 1 \\ u_1 - \dfrac{d}{2} = 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 5 \\ d = 2 \end{cases} \longrightarrow u_n = 2n + 3 \longrightarrow$ **Chọn A.**

Câu 29. Tính tổng $S = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 + ... + (2n-1) - 2n$ với $n \geq 1$ và $n \in \mathbb{N}$.

A. $S = 0.$ **B.** $S = -1.$ **C.** $S = n.$ **D.** $S = -n.$

Lời giải. Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì $(2n-1) - 2n = -1$.

Ta có $S=(1-2)+(3-4)+(5-6)+\cdots+((2n-1)-2n)$. Do đó ta xem S là tổng của n số hạng, mà mỗi số hạng đều bằng -1 nên $S=-n$. **Chọn D.**

Nhận xét: Ta có $1;3;5;\cdots;2n-1$ và $2;4;6;\cdots;2n$ là các cấp số cộng có n số hạng nên

$$S=(1+3+5+\cdots+2n-1)-(2+4+6+\cdots+2n)$$

$$=\frac{n}{2}(1+2n-1)-\frac{n}{2}(2+2n)=n^2-(n^2+n)=-n.$$

Câu 30. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $u_2+u_8+u_9+u_{15}=100$. Tính tổng 16 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho.

A. $S_{16}=100$. **B.** $S_{16}=200$. **C.** $S_{16}=300$. **D.** $S_{16}=400$.

Lời giải. Ta có $u_2+u_8+u_9+u_{15}=100\Leftrightarrow 4u_1+30d=100\Leftrightarrow 2u_1+15d=50$.

Khi đó $S_{16}=\frac{16}{2}(u_1+u_{16})=8(2u_1+15d)=8.50=400\longrightarrow$ **Chọn D.**

Câu 31. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4=-12$ và $u_{14}=18$. Tìm số hạng đầu tiên u_1 và công sai d của cấp số cộng đã cho.

A. $u_1=-21;\ d=3$. **B.** $u_1=-20;\ d=-3$.

C. $u_1=-22;\ d=3$. **D.** $u_1=-21;\ d=-3$.

Lời giải. $\begin{cases}-12=u_4=u_1+3d\\18=u_{14}=u_1+13d\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}u_1=-21\\d=3\end{cases}\longrightarrow$ **Chọn A.**

Câu 32. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2=2001$ và $u_5=1995$. Khi đó u_{1001} bằng:

A. $u_{1001}=4005$. **B.** $u_{1001}=4003$. **C.** $u_{1001}=3$. **D.** $u_{1001}=1$.

Lời giải. $\begin{cases}2001=u_2=u_1+d\\1995=u_5=u_1+4d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=2003\\d=-2\end{cases}\longrightarrow u_{1001}=u_1+1000d=3\longrightarrow$ **Chọn C.**

Câu 33. Cho cấp số cộng (u_n), biết: $u_n=-1, u_{n+1}=8$. Tính công sai d cảu cấp số cộng đó.

A. $d=-9$. **B.** $d=7$. **C.** $d=-7$. **D.** $d=9$.

Lời giải. $d=u_{n+1}-u_n=8-(-1)=9\longrightarrow$ **Chọn D.**

Câu 34. Cho cấp số cộng (u_n). Hãy chọn hệ thức đúng trong các hệ thức sau:

A. $\frac{u_{10}+u_{20}}{2}=u_5+u_{10}$. **B.** $u_{90}+u_{210}=2u_{150}$.

C. $u_{10}.u_{30}=u_{20}$. **D.** $\frac{u_{10}.u_{30}}{2}=u_{20}$.

Lời giải. Xét đáp án A: $\begin{cases}\frac{u_{10}+u_{30}}{2}=\frac{u_1+9d+u_1+29d}{2}=u_1+19d\\u_5+u_{10}=u_1+4d+u_1+9d=2u_2+13d\end{cases}\longrightarrow$ loại A.

Xét đáp án B: $\begin{cases} u_{90}+u_{210}=2u_2+298d=2(u_1+149d) \\ 2u_{150}=2(u_1+159d) \end{cases} \longrightarrow$ **Chọn B.**

Nhận xét: Có thể lấy một cấp số cộng cụ thể để kiểm tra, ví dụ $u_n=n\ (n\in\mathbb{N}^*)$.

Câu 35. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $u_2+u_{23}=60$. Tính tổng S_{24} của 24 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho.

A. $S_{24}=60$. **B.** $S_{24}=120$. **C.** $S_{24}=720$. **D.** $S_{24}=1440$.

Lời giải. $u_2+u_{23}=60\Leftrightarrow(u_1+d)+(u_1+22d)=60\Leftrightarrow 2u_1+23d=60$.

Khi đó $S_{24}=\frac{24}{2}(u_1+u_{24})=12(u_1+(u_1+23d))=12(2u_1+23d)=12.60=720$. **Chọn C.**

Câu 36. Một cấp số cộng có 6 số hạng. Biết rằng tổng của số hạng đầu và số hạng cuối bằng 17; tổng của số hạng thứ hai và số hạng thứ tư bằng 14. Tìm công sai d của cấp số cộng đã cho.

A. $d=2$. **B.** $d=-3$. **C.** $d=4$. **D.** $d=5$.

Lời giải. $\begin{cases} u_1+u_6=17 \\ u_2+u_4=14 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2u_1+5d=17 \\ 2u_1+6d=14 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} u_1=16 \\ d=-3 \end{cases}\longrightarrow$ **Chọn B.**

Câu 37. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_7-u_3=8 \\ u_2u_7=75 \end{cases}$. Tìm công sai d của cấp số cộng đã cho.

A. $d=\frac{1}{2}$. **B.** $d=\frac{1}{3}$. **C.** $d=2$. **D.** $d=3$.

Lời giải. $\begin{cases} u_7-u_3=8 \\ u_2u_7=75 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} (u_1+6d)-(u_1+2d)=8 \\ (u_1+d)(u_1+6d)=75 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} d=2 \\ (u_1+2)(u_1+12)=75 \end{cases}\longrightarrow$ **Chọn C.**

Câu 38. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1+u_7=26 \\ u_2^2+u_6^2=466 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\begin{cases} u_1=13 \\ d=-3 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} u_1=10 \\ d=-3 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} u_1=1 \\ d=4 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} u_1=13 \\ d=-4 \end{cases}$.

Lời giải. Ta có

$$\begin{cases} u_1+u_7=26 \\ u_2^2+u_6^2=466 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2u_1+6d=26 \\ (u_1+d)^2+(u_1+5d)^2=466 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} u_1=13-3d & (1) \\ (u_1+d)^2+(u_1+5d)^2=466 & (2) \end{cases}.$$

Thay (1) và (2) ta được: $(13-2d)^2+(13+2d)^2=466\Leftrightarrow 8d^2+338=466$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} d=4\Rightarrow u_1=1 \\ d=-4\Rightarrow u_1=25 \end{array}\right.\longrightarrow$ **Chọn C.**

Câu 39. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1-u_3+u_5=15 \\ u_1+u_6=27 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\begin{cases} u_1 = 21 \\ d = 3 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} u_1 = 21 \\ d = -3 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} u_1 = 18 \\ d = 3 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} u_1 = 21 \\ d = 4 \end{cases}$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 15 \\ u_1 + u_6 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - (u_1 + 2d) + (u_1 + 4d) = 15 \\ u_1 + (u_1 + 5d) = 27 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d = 15 \\ 2u_1 + 5d = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 21 \\ d = -3 \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 40. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa $\begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = 36 \\ u_2 u_3 = 54 \end{cases}$. Tìm công sai d của cấp số cộng (u_n) biết $d < 10$.

A. $d = 3$. **B.** $d = 4$. **C.** $d = 5$. **D.** $d = 6$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = 36 \\ u_2 u_3 = 54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u_1 + d) + (u_1 + 3d) + (u_1 + 5d) = 36 \\ (u_1 + d)(u_1 + 2d) = 54 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 12 & (1) \\ (u_1 + d)(u_1 + 2d) = 54 & (2) \end{cases}$. Từ (1) suy ra $u_1 = 12 - 3d$. Thay vào (2), ta được

$(12 - 2d)(12 - d) = 54 \Leftrightarrow d^2 - 18d + 45 = 0 \Leftrightarrow d = 3$ hoặc $d = 15$. **Chọn A.**

Câu 41. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 27 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 275 \end{cases}$. Tính u_2.

A. $u_2 = 3$. **B.** $u_2 = 6$. **C.** $u_2 = 9$. **D.** $u_2 = 12$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 27 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 275 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + (u_1 + d) + (u_1 + 2d) = 27 \\ u_1^2 + (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 = 275 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d = 9 & (1) \\ u_1^2 + (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 = 275 & (2) \end{cases}$.

Từ (1) suy ra $d = 9 - u_1$. Thay vào (2), ta được

$u_1^2 + (u_1 + 9 - u_1)^2 + [u_1 + 2(9 - u_1)]^2 = 275 \Leftrightarrow u_1^2 - 18u_1 + 65 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 13$ hoặc $u_1 = 5$.

Vậy $\begin{cases} u_1 = 13 \\ d = -4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u_1 = 5 \\ d = 4 \end{cases} \longrightarrow u_2 = u_1 + d = 9 \longrightarrow$ **Chọn C.**

Câu 42. Tính tổng $T = 15 + 20 + 25 + ... + 7515$.

A. $T = 5651265$. **B.** $T = 5651256$. **C.** $T = 5651625$. **D.** $T = 5651526$.

Lời giải. Ta thấy các số hạng của tổng T tạo thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 15$ và công sai $d = 5$.

Giả sử tổng trên có n số hạng thì $u_n = 7515$

$\Leftrightarrow u_1 + (n-1)d = 7515 \Leftrightarrow 15 + (n-1)5 = 7515 \Leftrightarrow n = 1501$.

Vậy $T = S_{1501} = \frac{(2u_1 + 1500d).1501}{2} = \frac{(2.15 + 1500.5).1501}{2} = 5651265 \longrightarrow$ **Chọn A.**

Câu 43. Tính tổng $T = 1000^2 - 999^2 + 998^2 - 997^2 + ... + 2^2 - 1^2$.

A. $T = 500500$. **B.** $T = 500005$. **C.** $T = 505000$. **D.** $T = 500050$.

Lời giải. Ta có $T = 1.(1000 + 999) + 1.(998 + 997) + ... + 1.(2 + 1) = 1999 + 1995 + ... + 3$.

Ta thấy các số hạng của tổng T tạo thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 1999$ và công sai $d = -4$.

Giả sử tổng trên có n số hạng thì

$$u_n = 3 \Leftrightarrow u_1 + (n-1)d = 3 \Leftrightarrow 1999 + (n-1)(-4) = 3 \Leftrightarrow n = 500.$$

Vậy $T = S_{500} = \frac{(u_1 + u_{500}).500}{2} = \frac{(1999 + 3).500}{2} = 500500 \longrightarrow$ **Chọn A.**

Câu 44. Cho cấp số cộng $u_1;\ u_2;\ u_3;\ \cdots;\ u_n$ có công sai d, các số hạng của cấp số cộng đã cho đều khác 0. Với giá trị nào của d thì dãy số $\frac{1}{u_1};\ \frac{1}{u_2};\ \frac{1}{u_3};\ \cdots;\ \frac{1}{u_n}$ là một cấp số cộng?

A. $d = -1$. **B.** $d = 0$. **C.** $d = 1$. **D.** $d = 2$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} u_2 - u_1 = d \\ u_3 - u_2 = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} = -\frac{d}{u_1u_2} \\ \frac{1}{u_3} - \frac{1}{u_2} = -\frac{d}{u_2u_3} \end{cases}$.

Theo yêu cầu bài toán thì ta phải có $\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} = \frac{1}{u_3} - \frac{1}{u_2}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d = 0 \\ \frac{1}{u_1} = \frac{1}{u_3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d = 0 \\ u_1 = u_3 = u_1 + 2d \end{array}\right. \Leftrightarrow d = 0 \longrightarrow$ **Chọn B.**

Câu 45. Nếu $a;\ b;\ c$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì dãy số nào sau đây lập thành cấp số cộng?

A. $2b^2;\ a^2;\ c^2$. **B.** $-2b; -2a; -2c$. **C.** $2b;\ a;\ c$. **D.** $2b;\ -a;\ -c$.

Lời giải. Ta có $c + a = 2b \Rightarrow -2(c + a) = -2(2b) \Leftrightarrow (-2c) + (-2a) = 2(-2b)$. **Chọn B.**

Câu 46. Nếu $\frac{1}{b+c};\ \frac{1}{c+a};\ \frac{1}{a+b}$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì dãy số nào sau đây lập thành cấp số cộng?

A. $b^2;\ a^2;\ c^2$. **B.** $c^2;\ a^2;\ b^2$. **C.** $a^2;\ b^2;\ c^2$. **D.** $a^2;\ c^2;\ b^2$.

Lời giải. Theo giả thiết ta có $\frac{2}{c+a} = \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow \frac{c+a}{2} = \frac{(b+c)(b+a)}{2b+a+c}$

$\Leftrightarrow (a+c)^2 + 2b(c+a) = 2(b^2 + ab + bc + ac) \Leftrightarrow a^2 + c^2 + 2ac + 2bc + 2bc = 2(b^2 + ab + bc + ac) \Leftrightarrow a^2 + c^2 = 2b^2$. **Chọn C.**

Câu 47. Cho $a;\ b;\ c$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a^2+c^2+2ac=4b^2$. **B.** $a^2+c^2=2ab-2bc$.

C. $a^2-c^2=ab-bc$. **D.** $a^2-c^2=2ab-2bc$.

Lời giải. Ta có: $a+c=2b\Rightarrow(a+c)^2=4b^2\Leftrightarrow a^2+c^2+2ac=4b^2\longrightarrow$ **Chọn A.**

Câu 48. Ba góc của một tam giác vuông tạo thành cấp số cộng. Hai góc nhọn của tam giác có số đo (độ) là:

A. $20°$ và $70°$. **B.** $45°$ và $45°$. **C.** $20°$ và $45°$. **D.** $30°$ và $60°$.

Lời giải. Ba góc A, B, C của một tam giác vuông theo thứ tự đó ($A<B<C$) lập thánh cấp số cộng nên $C=90,\ C+A=2B$.

Ta có $\begin{cases}A+B+C=180\\A+C=2B\\C=90\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3B=180\\A+C=2B\\C=90\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B=60\\A=30\\C=90\end{cases}\longrightarrow$ **Chọn D.**

Câu 49. Ba góc $A, B, C\ (A<B<C)$ của tam giác tạo thành cấp số cộng, biết góc lớn nhất gấp đôi góc bé nhất. Hiệu số đo độ của góc lớn nhất với góc nhỏ nhất bằng:

A. $40°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $80°$.

Lời giải. Ba góc A, B, C của một tam giác theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng thỏa yêu cầu, thì $C=2A,\ C+A=2B$. Ta có

$$\begin{cases}A+B+C=180^0\\A+C=2B\\C=2A\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3B=180^0\\A+C=2B\\C=2A\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B=60^0\\A+C=120^0\\C=2A\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}A=40^0\\B=60^0\\C=80^0\end{cases}\longrightarrow C-A=40^0$$. **Chọn A.**

Câu 50. Một tam giác vuông có chu vi bằng 3 và độ dài các cạnh lập thành một cấp số cộng. Độ dài các cạnh của tam giác đó là:

A. $\frac{1}{2};\ 1;\ \frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{3};\ 1;\ \frac{5}{3}$. **C.** $\frac{3}{4};\ 1;\ \frac{5}{4}$. **D.** $\frac{1}{4};\ 1;\ \frac{7}{4}$.

Lời giải. Ba cạnh $a, b, c\ (a<b<c)$ của một tam giác theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng thỏa yêu cầu thì

$$\begin{cases}a^2+b^2=c^2\\a+b+c=3\\a+c=2b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=c^2\\3b=3\\a+c=2b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=c^2\\b=1\\a=2b-c-2-c\end{cases}.$$

Ta có $a^2+b^2=c^2\xrightarrow[a=2-c]{b=1}(2-c)^2+1=c^2\Leftrightarrow-4c+5=0\Leftrightarrow c=\frac{5}{4}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{3}{4}\\b=1\\c=\frac{5}{4}\end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 51. Một rạp hát có 30 dãy ghế, dãy đầu tiên có 25 ghế. Mỗi dãy sau có hơn dãy trước 3 ghế. Hỏi rạp hát có tất cả bao nhiêu ghế?

A. 1635. **B.** 1792. **C.** 2055. **D.** 3125.

Lời giải. Số ghế của mỗi dãy (bắt đầu từ dãy đầu tiên) theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng có 30 số hạng có công sai $d=3$ và $u_1=25$.

Tổng số ghế là $S_{30}=u_1+u_2+\cdots+u_{30}=30u_1+\frac{30.29}{2}d=2055\longrightarrow$ **Chọn C.**

Câu 52. Người ta trồng 3003 cây theo một hình tam giác như sau: hàng thứ nhất trồng 1 cây, hàng thứ hai trồng 2 cây, hàng thứ ba trồng 3 cây,...Hỏi có tất cả bao nhiêu hàng cây?

A. 73. **B.** 75. **C.** 77. **D.** 79.

Lời giải. Số cây mỗi hàng (bắt đầu từ hàng thứ nhất) lập thành một cấp số cộng (u_n) có $u_1=1,\ d=1.$ Giả sử có n hàng cây thì $u_1+u_2+\cdots+u_n=3003=S_n.$

Ta có $3003=S_n=nu_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d \Leftrightarrow n^2+n-6006=0 \Leftrightarrow n=77 \longrightarrow$ **Chọn C.**

Câu 53. Một chiếc đồng hồ đánh chuông, kể từ thời điểm 0 (giờ) thì sau mỗi giờ thì số tiếng chuông được đánh đúng bằng số giờ mà đồng hồ chỉ tại thời điểm đánh chuông. Hỏi một ngày đồng hồ đó đánh bao nhiêu tiếng chuông?

A. 78. **B.** 156. **C.** 300. **D.** 48.

Lời giải. Kể từ lúc 1 (giờ) đến 24 (giời) số tiếng chuông được đánh lập thành cấp số cộng có 24 số hạng với $u_1=1,$ công sai $d=1.$ Vậy số tiếng chuông được đánh trong 1 ngày là:

$$S=S_{24}=\frac{24}{2}(u_1+u_{24})=12(1+24)=300 \longrightarrow \textbf{Chọn C.}$$

Câu 54. Trên một bàn cờ có nhiều ô vuông, người ta đặt 7 hạt dẻ vào ô đầu tiên, sau đó đặt tiếp vào ô thứ hai số hạt nhiều hơn ô thứ nhất là 5, tiếp tục đặt vào ô thứ ba số hạt nhiều hơn ô thứ hai là 5,… và cứ thế tiếp tục đến ô thứ n. Biết rằng đặt hết số ô trên bàn cờ người ta phải sử dụng 25450 hạt. Hỏi bàn cờ đó có bao nhiêu ô vuông?

A. 98. **B.** 100. **C.** 102. **D.** 104.

Lời giải. Số hạt dẻ trên mỗi ô (bắt đầu từ ô thứ nhất) theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng (u_n) có $u_1=7,\ d=5.$ Gọi n là số ô trên bàn cờ thì $u_1+u_2+\cdots+u_n=25450=S_n.$ Ta có $25450=S_n=nu_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=7n+\dfrac{n^2-n}{2}.5$

$\Leftrightarrow 5n^2+9n-50900=0 \Leftrightarrow n=100 \longrightarrow$ **Chọn B.**

Câu 55. Một gia đình cần khoan một cái giếng để lấy nước. Họ thuê một đội khoan giếng nước đến để khoan giếng nước. Biết giá của mét khoan đầu tiên là 80.000 đồng, kể từ mét khoan thứ 2 giá của mỗi mét khoan tăng thêm 5000 đồng so với giá của mét khoan trước đó. Biết cần phải khoan sâu xuống 50m mới có nước. Vậy hỏi phải trả bao nhiêu tiền để khoan cái giếng đó?

A. 5.2500.000 đồng. **B.** 10.125.000 đồng.

C. 4.000.000 đồng. **D.** 4.245.000 đồng.

Lời giải. Giá tiền khoang mỗi mét (bắt đầu từ mét đầu tiên) lập thành cấp số cộng (u_n) có $u_1=80000,\ d=5000.$ Do cần khoang 50 mét nên tổng số tiền cần trả là

$$u_1+u_2+\cdots+u_{50}=S_{50}=50u_1+\frac{50.49}{2}d=50.80000+1225.5000=10125000 \longrightarrow \textbf{Chọn B.}$$

PHẦN 2. CẤP SỐ NHÂN

Câu 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

A. $128;\ -64;\ 32;\ -16;\ 8;\ \ldots$ **B.** $\sqrt{2};\ 2;\ 4;\ 4\sqrt{2};\ \ldots.$

C. $5;\ 6;\ 7;\ 8;\ \ldots$ **D.** $15;\ 5;\ 1;\ \frac{1}{5};\ \ldots$

Lời giải. Dãy (u_n) là cấp số nhân

$$\Leftrightarrow u_n = qu_{n-1}\ \left(n\in\mathbb{N}^*\right) \Leftrightarrow \frac{u_2}{u_1}=\frac{u_3}{u_2}=\frac{u_4}{u_3}=\cdots=q\ (u_n\neq 0),\ \ q \text{ gọi là công bội.}$$

Xét đáp án A: $128;\ -64;\ 32;\ -16;\ 8;\ \ldots \longrightarrow \frac{u_2}{u_1}=-\frac{1}{2}=\frac{u_3}{u_2}=\frac{u_4}{u_3}\longrightarrow$ **Chọn A.**

Xét đáp án B: $\sqrt{2};\ 2;\ 4;\ 4\sqrt{2};\ \ldots.\longrightarrow \frac{u_2}{u_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 2=\frac{u_3}{u_2}\longrightarrow$ loại B.

Tương tự, ta cũng loại các đáp án C, D.

Câu 2. Trong các dãy số sau, dãy số nào không phải là một cấp số nhân?

A. $2;\ 4;\ 8;\ 16;\ \ldots$ **B.** $1;\ -1;\ 1;\ -1;\ \cdots$

C. $1^2;\ 2^2;\ 3^2;\ 4^2;\ \cdots$ **D.** $a;\ a^3;\ a^5;\ a^7;\ \cdots(a\neq 0)$.

Lời giải. Xét đáp án C: $1^2;\ 2^2;\ 3^2;\ 4^2;\ \cdots\longrightarrow \frac{u_2}{u_1}=4\neq\frac{9}{4}=\frac{u_3}{u_2}\longrightarrow$ **Chọn C.**

Các đáp án A, B, D đều là các cấp số nhân.

Nhận xét: Dãy (u_n) với $u_n\neq 0$ là cấp số nhân $\Leftrightarrow u_n=a.q^n$, tức là các số hạng của nó đều được biểu diễn dưới dạng lũy thừa của cùng một cơ số q (công bội), các số hạng liên tiếp (kể từ số hạng thứ hai) thì số mũ của chúng cách đều nhau. Ví dụ

$2;\ 4;\ 8;\ 16;\ \ldots\longrightarrow$ là cấp số nhân và $u_n=2^n$.

$1;\ -1;\ 1;\ -1;\ \cdots\longrightarrow$ là cấp số nhân và $u_n=(-1)^n$.

$a;\ a^3;\ a^5;\ a^7;\ \cdots(a\neq 0)\longrightarrow$ là cấp số nhân và $u_n=a^{2n-1}=\frac{1}{a}.\left(a^2\right)^n$.

Câu 3. Dãy số nào sau đây không phải là cấp số nhân?

A. $1;\ 2;\ 4;\ 8;\ \cdots$ **B.** $3;\ 3^2;\ 3^3;\ 3^4;\ \cdots$

C. $4;\ 2;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \cdots$ **D.** $\frac{1}{\pi};\ \frac{1}{\pi^2};\ \frac{1}{\pi^4};\ \frac{1}{\pi^6};\ \cdots$

Lời giải. Các đáp án A, B, C đều là các cấp số nhân công bội lần lượt là $2;3;\frac{1}{2}$.

Xét đáp án D: $\frac{1}{\pi};\ \frac{1}{\pi^2};\ \frac{1}{\pi^4};\ \frac{1}{\pi^6};\ \cdots\longrightarrow\frac{u_2}{u_1}=\frac{1}{\pi}\neq\frac{1}{\pi^2}=\frac{u_3}{u_2}\longrightarrow$ **Chọn D.**

Câu 4. Dãy số $1;\ 2;\ 4;\ 8;\ 16;\ 32;\ \cdots$ là một cấp số nhân với:

A. Công bội là 3 và số hạng đầu tiên là 1.

B. Công bội là 2 và số hạng đầu tiên là 1.

C. Công bội là 4 và số hạng đầu tiên là 2.

D. Công bội là 2 và số hạng đầu tiên là 2.

Lời giải. Cấp số nhân: $1;\ 2;\ 4;\ 8;\ 16;\ 32;\ldots \longrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ q = \dfrac{u_2}{u_1} = 2 \end{cases} \longrightarrow$ **Chọn B.**

Câu 5. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = -2$ và $q = -5$. Viết bốn số hạng đầu tiên của cấp số nhân.

A. $-2;\ 10;\ 50;\ -250.$ **B.** $-2;\ 10;\ -50;\ 250.$

C. $-2;\ -10;\ -50;\ -250.$ **D.** $-2;\ 10;\ 50;\ 250.$

Lời giải. $\begin{cases} u_1 = -2 \\ q = -5 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u_1 = -2 \\ u_2 = u_1 q = 10 \\ u_3 = u_2 q = -50 \\ u_4 = u_3 q = 250 \end{cases} \longrightarrow$ **Chọn B.**

Câu 6. Cho cấp số nhân $\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{4};\ \dfrac{1}{8};\ \cdots;\ \dfrac{1}{4096}$. Hỏi số $\dfrac{1}{4096}$ là số hạng thứ mấy trong cấp số nhân đã cho?

A. 11. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 13.

Lời giải. Cấp số nhân: $\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{4};\ \dfrac{1}{8};\ \cdots;\ \dfrac{1}{4096} \longrightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow u_n = \dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \dfrac{1}{2^n}.$

$$u_n = \frac{1}{4096} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{12}} \Leftrightarrow n = 12 \longrightarrow \textbf{Chọn B.}$$

Câu 7. Một cấp số nhân có hai số hạng liên tiếp là 16 và 36. Số hạng tiếp theo là:

A. 720. **B.** 81. **C.** 64. **D.** 56.

Lời giải. Ta có cấp số nhân (u_n) có:

$$\begin{cases} u_k = 16 \\ u_{k+1} = 36 \end{cases} \Rightarrow q = \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{9}{4} \longrightarrow u_{k+2} = u_{k+1} q = 81 \longrightarrow \textbf{Chọn B.}$$

Câu 8. Tìm x để các số $2;\ 8;\ x;\ 128$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $x = 14.$ **B.** $x = 32.$ **C.** $x = 64.$ **D.** $x = 68.$

Lời giải. Cấp số nhân $2;\ 8;\ x;\ 128$ theo thứ tự đó sẽ là $u_1;\ u_2;\ u_3;\ u_4$, ta có

$$\begin{cases} \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{u_3}{u_2} \\ \dfrac{u_3}{u_2} = \dfrac{u_4}{u_3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{8}{2} = \dfrac{x}{8} \\ \dfrac{128}{x} = \dfrac{x}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 32 \\ x^2 = 1024 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 32 \\ \left[\begin{array}{l} x = 32 \\ x = -32 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 32 \longrightarrow \textbf{Chọn B.}$$

Câu 9. Với giá trị x nào dưới đấy thì các số $-4;\ x;\ -9$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân?

A. $x=36.$ **B.** $x=-\dfrac{13}{2}.$ **C.** $x=6.$ **D.** $x=-36.$

Lời giải. Cấp số nhân: $-4;\ x;\ -9 \longrightarrow \dfrac{-9}{x}=\dfrac{x}{-4} \Leftrightarrow x^2=36 \Leftrightarrow x=\pm 6 \longrightarrow$ **Chọn C.**

Nhận xét: ba số $a;\ b;\ c$ theo thứ tự đó lấp thành cấp số nhân $\Leftrightarrow ac=b^2.$

Câu 10. Tìm $b>0$ để các số $\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ \sqrt{b};\ \sqrt{2}$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $b=-1.$ **B.** $b=1.$ **C.** $b=2.$ **D.** $b=-2.$

Lời giải. Cấp số nhân $\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ \sqrt{b};\ \sqrt{2} \longrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}=\left(\sqrt{b}\right)^2 \Leftrightarrow b=1 \longrightarrow$ **Chọn B.**

Câu 11. Tìm tất cả giá trị của x để ba số $2x-1;\ x;\ 2x+1$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}.$ **B.** $x=\pm\dfrac{1}{3}.$ **C.** $x=\pm\sqrt{3}.$ **D.** $x=\pm 3.$

Lời giải. Cấp số nhân $2x-1;\ x;\ 2x+1 \longrightarrow (2x-1)(2x+1)=x^2 \Leftrightarrow 3x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

Chọn A.

Câu 12. Tìm x để ba số $1+x;\ 9+x;\ 33+x$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $x=1.$ **B.** $x=3.$ **C.** $x=7.$ **D.** $x=3;\ x=7.$

Lời giải. Cấp số nhân $1+x;\ 9+x;\ 33+x \longrightarrow (1+x)(33+x)=(9+x)^2 \Leftrightarrow x=3.$ **Chọn B.**

Câu 13. Với giá trị $x,\ y$ nào dưới đây thì các số hạng lần lượt là $-2;\ x;\ -18;\ y$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân?

A. $\begin{cases}x=6\\y=-54\end{cases}.$ **B.** $\begin{cases}x=-10\\y=-26\end{cases}.$ **C.** $\begin{cases}x=-6\\y=-54\end{cases}.$ **D.** $\begin{cases}x=-6\\y=54\end{cases}.$

Lời giải. Cấp số nhân: $-2;\ x;\ -18;\ y \longrightarrow \begin{cases}\dfrac{x}{-2}=\dfrac{-18}{x}\\ \dfrac{-18}{x}=\dfrac{y}{-18}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\pm 6\\ y=\dfrac{324}{x}=\pm 54\end{cases}.$ Vậy

$(x;y)=(6;54)$ hoặc $(x;y)=(-6;-54) \longrightarrow$ **Chọn C.**

Câu 14. Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là $x;\ 12;\ y;\ 192.$ Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x=1; y=144.$ **B.** $x=2; y=72.$ **C.** $x=3; y=48.$ **D.** $x=4; y=36.$

Lời giải. Cấp số nhân: $x;\ 12;\ y;\ 192 \longrightarrow \begin{cases}\dfrac{12}{x}=\dfrac{y}{12}\\ \dfrac{y}{12}=\dfrac{192}{y}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{144}{y}\\ y^2=2304\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\pm 3\\ y=\pm 48\end{cases}.$ **Chọn C.**

Câu 15. Thêm hai số thực dương x và y vào giữa hai số 5 và 320 để được bốn số $5;\ x;\ y;\ 320$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhận. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\begin{cases} x = 25 \\ y = 125 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 20 \\ y = 80 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 15 \\ y = 45 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 30 \\ y = 90 \end{cases}$.

Lời giải. Cấp số nhân: $5;\ x;\ y;\ 320 \longrightarrow \begin{cases} u_1 = 5 \\ q = \dfrac{x}{5} \\ y = u_3 = u_1q^2 = \dfrac{x^2}{5} \\ 320 = u_4 = u_1q^3 = \dfrac{x^3}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 80 \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 16. Ba số hạng đầu của một cấp số nhân là $x-6;\ x$ và $y.$ Tìm y, biết rằng công bội của cấp số nhân là $6.$

A. $y = 216.$ **B.** $y = \dfrac{324}{5}.$ **C.** $y = \dfrac{1296}{5}.$ **D.** $y = 12.$

Lời giải. Cấp số nhân $x-6;\ x$ và y có công bội $q = 6$ nên ta có

$$\begin{cases} u_1 = x-6,\ q = 6 \\ x = u_2 = u_1q = 6(x-6) \Rightarrow \\ y = u_3 = u_2q^2 = 36x \end{cases} \begin{cases} x = \dfrac{36}{5} \\ y = 36.\dfrac{36}{5} = \dfrac{1296}{5} \end{cases} \longrightarrow \textbf{Chọn C.}$$

Câu 17. Hai số hạng đầu của của một cấp số nhân là $2x+1$ và $4x^2-1.$ Số hạng thứ ba của cấp số nhân là:

A. $2x-1.$ **B.** $2x+1.$

C. $8x^3-4x^2-2x+1.$ **D.** $8x^3+4x^2-2x-1.$

Lời giải. Công bội của cấp số nhân là: $q = \dfrac{4x^2-1}{2x+1} = 2x-1.$ Vậy số hạng thứ ba của cấp số nhân là: $(4x^2-1)(2x-1) = 8x^3-4x^2-2x+1 \longrightarrow$ **Chọn C.**

Câu 18. Dãy số nào sau đây là cấp số nhân?

A. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 1,\ n \ge 1 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = -3u_n,\ n \ge 1 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3,\ n \ge 1 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} u_1 = \dfrac{\pi}{2} \\ u_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{n-1}\right),\ n \ge 1 \end{cases}$.

Lời giải. (u_n) là cấp số nhân $\Leftrightarrow u_{n+1} = qu_n \longrightarrow$ **Chọn B.**

Câu 19. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{3}{2}.5^n.$ Khẳng định nào sau đây đúng?

A. (u_n) không phải là cấp số nhân.

B. (u_n) là cấp số nhân có công bội $q=5$ và số hạng đầu $u_1=\frac{3}{2}$.

C. (u_n) là cấp số nhân có công bội $q=5$ và số hạng đầu $u_1=\frac{15}{2}$.

D. (u_n) là cấp số nhân có công bội $q=\frac{5}{2}$ và số hạng đầu $u_1=3$.

Lời giải. $u_n=\frac{3}{2}.5^n$ là cấp số nhân công bội $q=5$ và $u_1=\frac{15}{2}\longrightarrow$ **Chọn C.**

Câu 20. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

A. $u_n=\frac{1}{3^{n-2}}$. **B.** $u_n=\frac{1}{3^n}-1$. **C.** $u_n=n+\frac{1}{3}$. **D.** $u_n=n^2-\frac{1}{3}$.

Lời giải. Dãy $u_n=\frac{1}{3^{n-2}}=9.\left(\frac{1}{3}\right)^n$ là cấp số nhân có $\begin{cases}u_1=3\\ q=\frac{1}{3}\end{cases}\longrightarrow$ **Chọn A.**

Câu 21. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

A. $u_n=7-3n$. **B.** $u_n=7-3^n$. **C.** $u_n=\frac{7}{3n}$. **D.** $u_n=7.3^n$.

Lời giải. Dãy $u_n=7.3^n$ là cấp số nhân có $\begin{cases}u_1=21\\ q=3\end{cases}\longrightarrow$ **Chọn D.**

Câu 22. Cho dãy số (u_n) là một cấp số nhân với $u_n\neq 0,\ n\in\mathbb{N}^*$. Dãy số nào sau đây không phải là cấp số nhân?

A. $u_1;\ u_3;\ u_5;\ \ldots$ **B.** $3u_1;\ 3u_2;\ 3u_3;\ \ldots$

C. $\frac{1}{u_1};\ \frac{1}{u_2};\ \frac{1}{u_3};\ \ldots$ **D.** $u_1+2;\ u_2+2;\ u_3+2;\ \ldots$

Lời giải. Giả sử (u_n) là cấp số nhân công bội q, thì

Dãy $u_1;\ u_3;\ u_5;\ \ldots$ là cấp số nhân công bội q^2.

Dãy $3u_1;\ 3u_2;\ 3u_3;\ \ldots$ là cấp số nhân công bội $2q$.

Dãy $\frac{1}{u_1};\ \frac{1}{u_2};\ \frac{1}{u_3};\ \ldots$ là cấp số nhân công bội $\frac{1}{q}$.

Dãy $u_1+2;\ u_2+2;\ u_3+2;\ \ldots$ không phải là cấp số nhân. **Chọn D.**

Nhận xét: Có thể lấy một cấp số nhân cụ thể để kiểm tra, ví dụ $u_n=2^n$.

Câu 23. Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là $3;\ 9;\ 27;\ 81;\ \ldots$. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số nhân đã cho.

A. $u_n=3^{n-1}$. **B.** $u_n=3^n$. **C.** $u_n=3^{n+1}$. **D.** $u_n=3+3^n$.

Lời giải. Cấp số nhân $3;\ 9;\ 27;\ 81;\ ... \longrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ q = \dfrac{9}{3} = 3 \end{cases} \Rightarrow u_n = u_1 q^{n-1} = 3.3^{n-1} = 3^n$.

Chọn B.

Câu 24. Một cấp số nhân có 6 số hạng, số hạng đầu bằng 2 và số hạng thứ sáu bằng 486. Tìm công bội q của cấp số nhân đã cho.

A. $q = 3$. **B.** $q = -3$. **C.** $q = 2$. **D.** $q = -2$.

Lời giải. Theo giải thiết ta có: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_6 = 486 \end{cases} \longrightarrow 486 = u_6 = u_1 q^5 = 2q^5 \Leftrightarrow q^5 = 243 \Leftrightarrow q = 3.$

Chọn A.

Câu 25. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -3$ và $q = \dfrac{2}{3}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $u_5 = -\dfrac{27}{16}$. **B.** $u_5 = -\dfrac{16}{27}$. **C.** $u_5 = \dfrac{16}{27}$. **D.** $u_5 = \dfrac{27}{16}$.

Lời giải. $\begin{cases} u_1 = -3 \\ q = \dfrac{2}{3} \end{cases} \longrightarrow u_5 = u_1 q^4 = -3.\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = -3.\dfrac{16}{81} = -\dfrac{16}{27}$. **Chọn B.**

Câu 26. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 2$ và $u_2 = -8$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_6 = 130$. **B.** $u_5 = 256$. **C.** $S_5 = 256$. **D.** $q = -4$.

Lời giải. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = -8 = u_1 q = 2q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ q = -4 \\ S_5 = u_1.\dfrac{1-q^5}{1-q} = 2.\dfrac{1-(-4)^5}{1+4} = 410 \\ S_6 = 2.\dfrac{1-(-4)^6}{1+4} = -1638 \\ u_5 = u_1 q^4 = 2.(-4)^4 = 512. \end{cases} \longrightarrow$ **Chọn D.**

Câu 27. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $q = -2$. Số 192 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân đã cho?

A. Số hạng thứ 5. **B.** Số hạng thứ 6.

C. Số hạng thứ 7. **D.** Không là số hạng của cấp số đã cho.

Lời giải. $192 = u_n = u_1 q^{n-1} = 3.(-2)^{n-1} \Leftrightarrow (-1)^{n-1}.2^{n-1} = 64 = (-1)^6.2^6 \Leftrightarrow n = 7$. **Chọn C.**

Câu 28. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -1$ và $q = -\dfrac{1}{10}$. Số $\dfrac{1}{10^{103}}$ là số hạng thứ mấy của cấp số nhân đã cho?

A. Số hạng thứ 103. **B.** Số hạng thứ 104.

C. Số hạng thứ 105. **D.** Không là số hạng của cấp số đã cho.

Lời giải. $\frac{1}{10^{103}}=u_n=u_1q^{n-1}=-1.\left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1}=\frac{(-1)^n}{10^{n-1}}\Leftrightarrow\begin{cases}n\ chan\\ n-1=103\end{cases}\Leftrightarrow n=104.$ **Chọn B.**

Câu 29. Một cấp số nhân có công bội bằng 3 và số hạng đầu bằng 5. Biết số hạng chính giữa là 32805. Hỏi cấp số nhân đã cho có bao nhiêu số hạng?

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 9.

Lời giải. $32805=u_n=u_1q^{n-1}=5.3^{n-1}\Leftrightarrow 3^{n-1}=6561=3^8\Leftrightarrow n=9.$ Vậy u_9 là số hạng chính giữa của cấp số nhân, nên cấp số nhân đã cho có 17 số hạng. **Chọn B.**

Câu 30. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_n=81$ và $u_{n+1}=9.$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $q=\frac{1}{9}.$ **B.** $q=9.$ **C.** $q=-9.$ **D.** $q=-\frac{1}{9}.$

Lời giải. Công bội $q=\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{9}{81}=\frac{1}{9}\longrightarrow$ **Chọn A.**

Câu 31. Một dãy số được xác định bởi $u_1=-4$ và $u_n=-\frac{1}{2}u_{n-1},\ n\geq 2.$ Số hạng tổng quát u_n của dãy số đó là:

A. $u_n=2^{n-1}.$ **B.** $u_n=(-2)^{n-1}.$ **C.** $u_n=-4\left(2^{-n+1}\right).$ **D.** $u_n=-4\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$

Lời giải. $\begin{cases}u_1=-4\\ u_{n+1}=-\frac{1}{2}u_n\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}u_1=-4\\ q=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow u_n=u_1q^{n-1}=-4.\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$ **Chọn D.**

Câu 32. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=-3$ và $q=-2.$ Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho.

A. $S_{10}=-511.$ **B.** $S_{10}=-1025.$ **C.** $S_{10}=1025.$ **D.** $S_{10}=1023.$

Lời giải. $\begin{cases}u_1=-3\\ q=-2\end{cases}\longrightarrow S_{10}=u_1.\frac{1-q^{10}}{1-q}=-3.\frac{1-(-2)^{10}}{1-(-2)}=1023.$ **Chọn D.**

Câu 33. Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là $1;\ 4;\ 16;\ 64;\ \cdots$ Gọi S_n là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n=4^{n-1}.$ **B.** $S_n=\frac{n\left(1+4^{n-1}\right)}{2}.$ **C.** $S_n=\frac{4^n-1}{3}.$ **D.** $S_n=\frac{4\left(4^n-1\right)}{3}.$

Lời giải. Cấp số nhân đã cho có $\begin{cases}u_1=1\\ q=4\end{cases}\longrightarrow S_n=u_1.\frac{1-q^n}{1-q}=1.\frac{1-4^n}{1-4}=\frac{4^n-1}{3}.$ **Chọn C.**

Câu 34. Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là $\frac{1}{4};\ \frac{1}{2};\ 1;\ \cdots;\ 2048.$ Tính tổng S của tất cả các số hạng của cấp số nhân đã cho.

A. $S=2047,75.$ **B.** $S=2049,75.$ **C.** $S=4095,75.$ **D.** $S=4096,75.$

Lời giải. Cấp số nhân đã cho có

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{4} \\ q = 2 \end{cases} \longrightarrow 2048 = 2^{11} = u_1 q^{n-1} = \frac{1}{2}.2^{n-1} = 2^{n-2} \Leftrightarrow n = 13.$$

Vậy cấp số nhân đã cho có tất cả 13 số hạng. Vậy

$$S_{13} = u_1.\frac{1-q^{13}}{1-q} = \frac{1}{4}.\frac{1-2^{13}}{1-2} = 2047,75 \longrightarrow \textbf{ Chọn A.}$$

Câu 35. Tính tổng $S = -2+4-8+16-32+64-...+(-2)^{n-1}+(-2)^n$ với $n \geq 1,\ n \in \mathbb{N}.$

A. $S = 2n.$ **B.** $S = 2^n.$ **C.** $S = \dfrac{-2(1-2^n)}{1-2}.$ **D.** $S = -2.\dfrac{1-(-2)^n}{3}.$

Lời giải. Các số hạng $-2;\ 4;\ -8;\ 16;\ -32;\ 64;...;(-2)^{n-1};\ (-2)^n$ trong tổng S gồm có n số hạng theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân có $u_1 = -2,\ q = -2.$ Vậy

$$S = S_n = u_1.\frac{1-q^n}{1-q} = -2.\frac{1-(-2)^n}{1-(-2)} = -2.\frac{1-(-2)^n}{3} \longrightarrow \textbf{ Chọn D.}$$

Câu 36. Một cấp số nhân có 6 số hạng với công bội bằng 2 và tổng số các số hạng bằng 189. Tìm số hạng cuối u_6 của cấp số nhân đã cho.

A. $u_6 = 32.$ **B.** $u_6 = 104.$ **C.** $u_6 = 48.$ **D.** $u_6 = 96.$

Lời giải. Theo giả thiết:

$$\begin{cases} q = 2 \\ S_6 = 189 = u_1\dfrac{1-q^6}{1-q} = u_1.\dfrac{1-2^6}{1-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow u_6 = u_1 q^5 = 3.2^5 = 96. \textbf{ Chọn D.}$$

Câu 37. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -6$ và $q = -2.$ Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho bằng $2046.$ Tìm $n.$

A. $n = 9.$ **B.** $n = 10.$ **C.** $n = 11.$ **D.** $n = 12.$

Lời giải. Ta có

$$2046 = S_n = u_1.\frac{1-q^n}{1-q} = -6.\frac{1-(-2)^n}{1-(-2)} = 2\left((-2)^n - 1\right) \Rightarrow (-2)^n = 1024 \Leftrightarrow n = 10. \textbf{ Chọn B.}$$

Câu 38. Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n = 5^n - 1.$ Tìm số hạng thứ 4 của cấp số nhân đã cho.

A. $u_4 = 100.$ **B.** $u_4 = 124.$ **C.** $u_4 = 500.$ **D.** $u_4 = 624.$

Lời giải. Ta có $5^{n-1} - 1 = S_n = u_1.\dfrac{1-q^n}{1-q} = \dfrac{u_1}{q-1}(q^n - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = q-1 \\ q = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 4 \\ q = 5 \end{cases}.$ Khi đó

$$u_4 = u_1 q^3 = 4.5^3 = 500 \longrightarrow \textbf{ Chọn C.}$$

Câu 39. Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n = \frac{3^n - 1}{3^{n-1}}$. Tìm số hạng thứ 5 của cấp số nhân đã cho.

A. $u_5 = \frac{2}{3^4}$. **B.** $u_5 = \frac{1}{3^5}$. **C.** $u_5 = 3^5$. **D.** $u_5 = \frac{5}{3^5}$.

Lời giải. Ta có $\frac{3^n - 1}{3^{n-1}} = 3\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = S_n = \frac{u_1}{1-q}(1-q^n) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3(1-q) \\ q = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ q = \frac{1}{3} \end{cases}$. Khi đó

$$u_5 = u_1 q^4 = \frac{2}{3^4} \longrightarrow \textbf{Chọn A.}$$

Câu 40. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = -2$ và $u_5 = 54$. Tính tổng 1000 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho.

A. $S_{1000} = \frac{1 - 3^{1000}}{4}$. **B.** $S_{1000} = \frac{3^{1000} - 1}{2}$.

C. $S_{1000} = \frac{3^{1000} - 1}{6}$. **D.** $S_{1000} = \frac{1 - 3^{1000}}{6}$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} -2 = u_2 = u_1 q \\ 54 = u_5 = u_1 q^4 = u_1 q.q^3 = -2q^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{2}{3} \\ q = -3 \end{cases}$. Khi đó

$$S_{100} = u_1.\frac{1 - q^{100}}{1 - q} = \frac{2}{3}.\frac{1 - (-3)^{100}}{1 - (-3)} = \frac{1 - 3^{100}}{6} \longrightarrow \textbf{Chọn D.}$$

Câu 41. Cho cấp số nhân (u_n) có tổng của hai số hạng đầu tiên bằng 4, tổng của ba số hạng đầu tiên bằng 13. Tính tổng của năm số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho, biết công bội của cấp số nhân là một số dương.

A. $S_5 = \frac{181}{16}$. **B.** $S_5 = 141$. **C.** $S_5 = 121$. **D.** $S_5 = \frac{35}{16}$.

Lời giải. $\begin{cases} 4 = S_2 = u_1 + u_2 = u_1(1+q) \\ 13 = S_3 = u_1(1 + q + q^2) \end{cases} \Leftrightarrow 4(1 + q + q^2) = 13(1+q) \Leftrightarrow q = 3\ (q > 0) \Rightarrow u_1 = 1.$ Khi đó $S_5 = u_1.\frac{1 - q^5}{1 - q} = 1.\frac{1 - 3^5}{1 - 3} = 121 \longrightarrow$ **Chọn C.**

Câu 42. Một cấp số nhân có số hạng thứ bảy bằng $\frac{1}{2}$, công bội bằng $\frac{1}{4}$. Hỏi số hạng đầu tiên của cấp số nhân bằng bao nhiêu?

A. 4096. **B.** 2048. **C.** 1024. **D.** $\frac{1}{512}$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} q = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} = u_7 = u_1 q^6 = \frac{u_1}{4^6} \end{cases} \Rightarrow u_1 = \frac{4^6}{2} = 2048 \longrightarrow$ **Chọn B.**

Câu 43. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = -6$ và $u_6 = -486$. Tìm công bội q của cấp số nhân đã cho, biết rằng $u_3 > 0$.

A. $q=-3$. **B.** $q=-\frac{1}{3}$. **C.** $q=\frac{1}{3}$. **D.** $q=3$.

Lời giải. $\begin{cases} -6=u_2=u_1q \\ -486=u_6=u_1q^5=u_1q.q^4=-6.q^4 \end{cases} \Rightarrow q^4=81=3^4 \Rightarrow q=3.$ **Chọn D.**

Câu 44. Cho cấp số nhân $u_1;\ u_2;\ u_3;\ \cdots$ với $u_1=1$. Tìm công bội q để $4u_2+5u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $q=-\frac{2}{5}$. **B.** $q=0$. **C.** $q=\frac{2}{5}$. **D.** $q=1$.

Lời giải. Ta có $4u_2+5u_3=4u_1q+5u_1q^2=5q^2+4q=5\left(q+\frac{2}{5}\right)^2-\frac{4}{5}\geq-\frac{4}{5}$. Vậy

$$\min\left(4u_2+5u_3\right)=-\frac{4}{5} \text{ khi } q=-\frac{2}{5}\longrightarrow$$ **Chọn A.**

Câu 45. Một cấp số nhân có số hạng thứ hai bằng 4 và số hạng thứ sáu bằng 64, thì số hạng tổng quát của cấp số nhân đó có thể tính theo công thức nào dưới đây?

A. $u_n=2^{n-1}$. **B.** $u_n=2^n$ **C.** $u_n=2^{n+1}$. **D.** $u_n=2n$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} 4=u_2=u_1q \\ 64=u_6=u_1q^5=u_1q.q^4=4q^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=2 \\ q=2 \end{cases} \Rightarrow u_n=u_1q^{n-1}=2.2^{n-1}=2^n$.

Chọn B.

Câu 46. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $u_k=u_1.q^{k-1}$. **B.** $u_k=\frac{u_{k-1}+u_{k+1}}{2}$. **C.** $u_k=\sqrt{u_{k+1}.u_{k+2}}$. **D.** $u_k=u_1+(k-1)q$.

Lời giải. Chọn A.

Câu 47. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1\neq0$ và $q\neq0$. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $u_7=u_4.q^3$. **B.** $u_7=u_4.q^4$. **C.** $u_7=u_4.q^5$. **D.** $u_7=u_4.q^6$.

Lời giải. $\begin{cases} u_4=u_1q^3 \\ u_7=u_1q^6 \end{cases} \longrightarrow u_7=\left(u_1q^3\right).q^3=u_4q^3 \longrightarrow$ **Chọn A.**

Câu 48. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1\neq0$ và $q\neq0$. Với $1<k<m$, đẳng thức nào dưới đây là đúng?

A. $u_m=u_k.q^k$. **B.** $u_m=u_k.q^m$. **C.** $u_m=u_k.q^{m-k}$. **D.** $u_m=u_k.q^{m+k}$.

Lời giải. $u_k=u_1q^{k-1}\longrightarrow u_m=u_1q^{m-1}=\left(u_1q^{k-1}\right).q^{m-k}=u_kq^{m-k}\longrightarrow$ **Chọn C.**

Câu 49. Cho một cấp số nhân có 15 số hạng. Đẳng thức nào sau đây là sai?

A. $u_1.u_{15}=u_2.u_{14}$. **B.** $u_1.u_{15}=u_5.u_{11}$. **C.** $u_1.u_{15}=u_6.u_9$. **D.** $u_1.u_{15}=u_{12}.u_4$.

Lời giải. $u_1.u_{15}=u_1.u_1.q^{14}=\left(u_1q^{m-1}\right).\left(u_1q^{n-1}\right)=u_m.u_n$ với $m+n=16$. **Chọn C.**

Câu 50. Cho một cấp số nhân có n số hạng $(n > k > 55)$. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $u_1.u_n = u_2.u_{n-1}$. **B.** $u_1.u_n = u_5.u_{n-4}$. **C.** $u_1.u_n = u_{55}.u_{n-55}$. **D.** $u_1.u_n = u_k.u_{n-k+1}$.

Lời giải. $u_1u_n = u_1.u_1q^{n-1} = \left(u_1q^{k-1}\right).\left(u_1q^{m-1}\right) = u_k.u_m$ với $k+m = n+1$. **Chọn C.**

Câu 51. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân (u_n), biết $\begin{cases} u_6 = 192 \\ u_7 = 384 \end{cases}$.

A. $\begin{cases} u_1 = 5 \\ q = 2 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} u_1 = 6 \\ q = 2 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} u_1 = 6 \\ q = 3 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} u_1 = 5 \\ q = 3 \end{cases}$.

Lời giải. $\begin{cases} 192 = u_6 = u_1q^5 \\ 384 = u_7 = u_1q^6 = \left(u_1q^5\right)q = 192q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = \dfrac{192}{q^5} = 6 \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 52. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_4 - u_2 = 36 \\ u_5 - u_3 = 72 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $\begin{cases} u_1 = 4 \\ q = 2 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} u_1 = 6 \\ q = 2 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} u_1 = 9 \\ q = 2 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} u_1 = 9 \\ q = 3 \end{cases}$.

Lời giải. $\begin{cases} 36 = u_4 - u_2 = u_1q\left(q^2-1\right) \\ 72 = u_5 - u_3 = u_1q^2\left(q^2-1\right) = \left[u_1q\left(q^2-1\right)\right]q = 36q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = \dfrac{36}{q\left(q^2-1\right)} = 6 \end{cases}$.

Chọn B.

Câu 53. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_{20} = 8u_{17} \\ u_1 + u_5 = 272 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $q = 2$. **B.** $q = -4$. **C.** $q = 4$. **D.** $q = -2$.

Lời giải. $\begin{cases} u_{20} = 8u_{17} \\ u_1 + u_5 = 272 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^{19} = 8u_1q^{16} \\ u_1\left(1+q^4\right) = 272 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^3 = 8 \\ u_1 = \dfrac{272}{1+q^4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = 16 \end{cases}$. **Chọn A.**

Câu 54. Một cấp số nhân có năm số hạng mà hai số hạng đầu tiên là các số dương, tích của số hạng đầu và số hạng thứ ba bằng 1, tích của số hạng thứ ba và số hạng cuối bằng $\dfrac{1}{16}$. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân đã cho.

A. $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ q = 2 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} u_1 = 2 \\ q = \dfrac{1}{2} \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} u_1 = -2 \\ q = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} u_1 = -\dfrac{1}{2} \\ q = -2 \end{cases}$.

Lời giải. $\begin{cases} u_1, \\ u_2 > 0 \\ u_1.u_3 = 1 \\ u_3.u_5 = \dfrac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 > 0, \\ q > 0 \\ u_1^2q^2 = 1 \\ \dfrac{1}{16} = u_1^2q^6 = \left(u_1^2q^2\right)q^4 = q^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \dfrac{1}{2} \\ u_1 = \dfrac{1}{q} = 2 \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 55. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases}$. Tính u_3.

A. $u_3 = 10.$ **B.** $u_3 = 15.$ **C.** $u_3 = 20.$ **D.** $u_3 = 25.$

Lời giải. Ta có $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_1q^2 + u_1q^4 = 65 \\ u_1 + u_1q^6 = 325 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1 - q^2 + q^4\right) = 65 & (1) \\ u_1\left(1 + q^6\right) = 325 & (2) \end{cases}$.

Lấy (2) chia (1), ta được $\dfrac{1+q^6}{1-q^2+q^4} = \dfrac{325}{65} \Leftrightarrow 1 + q^2 = 5 \Leftrightarrow q = \pm 2$.

$$\text{Vậy } \begin{cases} u_1 = 5 \\ q = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u_1 = 5 \\ q = -2 \end{cases} \longrightarrow u_3 = u_1q^2 = 5.4 = 20.$$ **Chọn C.**

Câu 56. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 14 \\ u_1.u_2.u_3 = 64 \end{cases}$. Tính u_2.

A. $u_2 = 4.$ **B.** $u_2 = 6.$ **C.** $u_2 = 8.$ **D.** $u_2 = 10.$

Lời giải. Từ $u_1.u_2.u_3 = 64 \Leftrightarrow u_1.u_1q.u_1q^2 = 64 \Leftrightarrow (u_1q)^3 = 64 \Leftrightarrow u_1q = 4$ hay $u_2 = 4$.

Thay vào hệ ban đầu ta được $\begin{cases} u_1 + 4 + u_3 = 14 \\ u_1.4.u_3 = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_3 = 10 \\ u_1.u_3 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 8 \\ u_3 = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_3 = 8 \end{cases}$.

$$\text{Vậy } \begin{cases} u_1 = 8 \\ q = \dfrac{1}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u_1 = 2 \\ q = 2 \end{cases} \longrightarrow u_2 = u_1q = 4.$$ **Chọn A.**

Câu 57. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q và thỏa

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 49\left(\dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \dfrac{1}{u_3} + \dfrac{1}{u_4} + \dfrac{1}{u_5}\right) \\ u_1 + u_3 = 35 \end{cases}.$$

Tính $P = u_1 + 4q^2$.

A. $P = 24.$ **B.** $P = 29.$ **C.** $P = 34.$ **D.** $P = 39.$

Lời giải. Nhận xét: Nếu $u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5$ là một cấp số nhân với công bội q thì $\dfrac{1}{u_1}, \dfrac{1}{u_2}, \dfrac{1}{u_3}, \dfrac{1}{u_4}, \dfrac{1}{u_5}$ cũng tạo thành cấp số nhân với công bội $\dfrac{1}{q}$.

Do đó từ giả thiết ta có $\begin{cases} u_1.\dfrac{q^5 - 1}{q - 1} = 49\left(\dfrac{1}{u_1}.\dfrac{\frac{1}{q^5} - 1}{\frac{1}{q} - 1}\right) & (1) \\ u_1 + u_1q^2 = 35 & (2) \end{cases}$.

Phương trình $(1) \Leftrightarrow u_1.\frac{q^5-1}{q-1} = \frac{49}{u_1}\left(\frac{q^5-1}{q^4(q-1)}\right) \Leftrightarrow u_1^2q^4 = 49 \Leftrightarrow u_1q^2 = \pm 7$.

Với $u_1q^2 = -7$. Thay vào (2), ta được $u_1 - 7 = 35 \Leftrightarrow u_1 = 42$. Suy ra $q^2 = -\frac{7}{42}$: vô lý.

Với $u_1q^2 = 7$. Thay vào (2), ta được $u_1 + 7 = 35 \Leftrightarrow u_1 = 28$. Vậy $\begin{cases} u_1 = 28 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u_1 = 28 \\ q = -\frac{1}{2} \end{cases}$. Khi đó $u_1 + 4q^2 = 29$. **Chọn B.**

Câu 58. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q và thỏa $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 26 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 364 \end{cases}$. Tìm q biết rằng $q > 1$.

A. $q = \frac{5}{4}$. **B.** $q = 4$. **C.** $q = \frac{4}{3}$. **D.** $q = 3$.

Lời giải. Ta có

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 26 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 364 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2\right) = 26 \\ u_1^2\left(1+q^2+q^4\right) = 364 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2\left(1+q+q^2\right)^2 = 26^2 & (1) \\ u_1^2\left(1+q^2+q^4\right) = 364 & (2) \end{cases}.$$

Lấy (1) chia (2), ta được

$$\frac{\left(1+q+q^2\right)^2}{1+q^2+q^4} = \frac{26^2}{364} \Leftrightarrow 3q^4 - 7q^3 - 4q^2 - 7q + 3 = 0 \Leftrightarrow 3\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) - 7\left(q + \frac{1}{q}\right) - 4 = 0.$$

Đặt $t = q + \frac{1}{q}$, $|t| \geq 2$. Phương trình trở thành $3t^2 - 7t - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = -\frac{10}{3} \end{array}\right.$.

Với $t = -\frac{10}{3}$, suy ra $q + \frac{1}{q} = -\frac{10}{3} \Leftrightarrow 3q^2 - 10q + 3 = 0 \Leftrightarrow q = 3$ hoặc $q = \frac{1}{3}$. Vì $q > 1$ nên $q = 3$. **Chọn D.**

Câu 59. Các số $x + 6y,\ 5x + 2y,\ 8x + y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng; đồng thời các số $x - 1,\ y + 2,\ x - 3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Tính $x^2 + y^2$.

A. $x^2 + y^2 = 40$. **B.** $x^2 + y^2 = 25$. **C.** $x^2 + y^2 = 100$. **D.** $x^2 + y^2 = 10$.

Lời giải. Theo giả thiết ta có $\begin{cases} (x+6y) + (8x+y) = 2(5x+2y) \\ (x-1)(x-3y) = (y+2)^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ (3y-1)(3y-3y) = (y+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ 0 = (y+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = -2 \end{cases}.$$

Suy ra $x^2 + y^2 = 40$. **Chọn A.**

Câu 60. Ba số $x;\ y;\ z$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân với công bội q khác 1; đồng thời các số $x;\ 2y;\ 3z$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với công sai khác 0. Tìm giá trị của q.

A. $q=\frac{1}{3}$. **B.** $q=\frac{1}{9}$. **C.** $q=-\frac{1}{3}$. **D.** $q=-3$.

Lời giải. $\begin{cases} y=xq;\ z=xq^2 \\ x+3z=2(2y) \end{cases} \Rightarrow x+3xq^2=4xq \Rightarrow x(3q^2-4q+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 3q^2-4q+1=0 \end{array}\right.$.

Nếu $x=0 \Rightarrow y=z=0 \Rightarrow$ công sai của cấp số cộng: $x;\ 2y;\ 3z$ bằng 0 (vô lí).

Nếu $3q^2-4q+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q=1 \\ q=\frac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow q=\frac{1}{3}\ (q\neq 1)$. **Chọn A.**

Câu 61. Cho dãy số tăng $a,\ b,\ c\ (c\in\mathbb{Z})$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân; đồng thời $a,\ b+8,\ c$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng và $a,\ b+8,\ c+64$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tính giá trị biểu thức $P=a-b+2c$.

A. $P=\frac{184}{9}$. **B.** $P=64$. **C.** $P=\frac{92}{9}$. **D.** $P=32$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} ac=b^2 \\ a+c=2(b+8) \\ a(c+64)=(b+8)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ac=b^2 & (1) \\ a-2b=16-c & (2) \\ ac+64a=(b+8)^2 & (3) \end{cases}$.

Thay (1) vào (3) ta được: $b^2+64a=b^2+16b+64 \Leftrightarrow 4a-b=4\ (4)$.

Kết hợp (2) với (4) ta được: $\begin{cases} a-2b=16-c \\ 4a-b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{c-8}{7} \\ b=\frac{4c-60}{7} \end{cases}\ (5)$

Thay (5) vào (1) ta được:

$$7(c-8)c=(4c-60)^2 \Leftrightarrow 9c^2-424c+3600=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=36 \\ c=\frac{100}{9} \end{array}\right. \Leftrightarrow c=36\ (c\in\mathbb{Z}).$$

Với $c=36 \Rightarrow a=4,\ b=12 \Rightarrow P=4-12+72=64.$ **Chọn B.**

Câu 62. Số hạng thứ hai, số hạng đầu và số hạng thứ ba của một cấp số cộng với công sai khác 0 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân với công bội q. Tìm q.

A. $q=2$. **B.** $q=-2$. **C.** $q=-\frac{3}{2}$. **D.** $q=\frac{3}{2}$.

Lời giải. Giả sử ba số hạng $a;\ b;\ c$ lập thành cấp số cộng thỏa yêu cầu, khi đó $b;\ a;\ c$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân công bội q. Ta có

$$\begin{cases} a+c=2b \\ a=bq; c=bq^2 \end{cases} \Rightarrow bq+bq^2=2b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ q^2+q-2=0 \end{array}\right..$$

Nếu $b=0 \Rightarrow a=b=c=0$ nên $a;\ b;\ c$ là cấp số cộng công sai $d=0$ (vô lí).

Nếu $q^2+q-2=0 \Leftrightarrow q=1$ hoặc $q=-2$. Nếu $q=1 \Rightarrow a=b=c$ (vô lí), do đó $q=-2$. **Chọn B.**

Câu 63. Cho bố số a, b, c, d biết rằng a, b, c theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân công bội $q>1$; còn b, c, d theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng. Tìm q biết rằng $a+d=14$ và $b+c=12$.

A. $q=\dfrac{18+\sqrt{73}}{24}$. **B.** $q=\dfrac{19+\sqrt{73}}{24}$. **C.** $q=\dfrac{20+\sqrt{73}}{24}$. **D.** $q=\dfrac{21+\sqrt{73}}{24}$.

Lời giải. Giả sử a,b,c lập thành cấp số cộng công bội q. Khi đó theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} b=aq,\ c=aq^2 \\ b+d=2c \\ a+d=14 \\ b+c=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} aq+d=2aq^2 & (1) \\ a+d=14 & (2) \\ a\left(q+q^2\right)=12 & (3) \end{cases}$$

Nếu $q=0\Rightarrow b=c=0=d$ (vô lí)

Nếu $q=-1\Rightarrow b=-a;c=a\Rightarrow b+c=0$ (vô lí).

Vậy $q\neq 0,\ q\neq -1,$ từ (2) và (3) ta có: $d=14-a$ và $a=\dfrac{12}{q+q^2}$ thay vào (1) ta được:

$$\frac{12q}{q+q^2}+\frac{14q^2+14q-12}{q+q^2}=\frac{24q^3}{q+q^2}\Leftrightarrow 12q^3-7q^2-13q+6=0$$

$$\Leftrightarrow (q+1)\left(12q^2-19q+6\right)=0\Leftrightarrow q=\frac{19\pm\sqrt{73}}{24}$$

Vì $q>1$ nên $q=\dfrac{19+\sqrt{73}}{24}$. **Chọn B.**

Câu 64. Gọi $S=9+99+999+...+999...9$ (n số 9) thì S nhận giá trị nào sau đây?

A. $S=\dfrac{10^n-1}{9}$.

B. $S=10\left(\dfrac{10^n-1}{9}\right)$.

C. $S=10\left(\dfrac{10^n-1}{9}\right)-n$.

D. $S=10\left(\dfrac{10^n-1}{9}\right)+n$.

Lời giải. Ta có $S=9+99+999+...+\underbrace{99...9}_{\text{n so 9}}=(10-1)+\left(10^2-1\right)+...+\left(10^n-1\right)$

$=10+10^2+...+10^n-n=10.\dfrac{1-10^n}{1-10}-n.$ **Chọn C.**

Câu 65. Gọi $S=1+11+111+...+111...1$ (n số 1) thì S nhận giá trị nào sau đây?

A. $S=\dfrac{10^n-1}{81}$.

B. $S=10\left(\dfrac{10^n-1}{81}\right)$.

C. $S=10\left(\dfrac{10^n-1}{81}\right)-n$.

D. $S=\dfrac{1}{9}\left[10\left(\dfrac{10^n-1}{9}\right)-n\right]$.

Lời giải. Ta có $S=\frac{1}{9}\left(9+99+999+...+\underbrace{99...9}_{\text{n so 9}}\right)=\frac{1}{9}.\left[10.\frac{1-10^n}{1-10}-n\right]$. **Chọn D.**

Câu 66. Biết rằng $S=1+2.3+3.3^2+...+11.3^{10}=a+\frac{21.3^b}{4}$. Tính $P=a+\frac{b}{4}$.

A. $P=1$. **B.** $P=2$. **C.** $P=3$. **D.** $P=4$.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $3S=3+2.3^2+3.3^3+...+11.3^{11}$. Do đó

$$-2S=S-3S=1+3+3^2+...+3^{10}-10.3^{11}=\frac{1-3^{11}}{1-3}-11.3^{11}=-\frac{1}{2}-\frac{21.3^{11}}{2}\Rightarrow S=\frac{1}{4}+\frac{21}{4}.3^{11}.$$

Vì $S=\frac{1}{4}+\frac{21.3^{11}}{4}=a+\frac{21.3^b}{4}\Rightarrow a=\frac{1}{4},\ b=11\longrightarrow P=\frac{1}{4}+\frac{11}{4}=3$. **Chọn C.**

Câu 67. Một cấp số nhân có ba số hạng là $a,\ b,\ c$ (theo thứ tự đó) trong đó các số hạng đều khác 0 và công bội $q\neq 0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\frac{1}{a^2}=\frac{1}{bc}$. **B.** $\frac{1}{b^2}=\frac{1}{ac}$. **C.** $\frac{1}{c^2}=\frac{1}{ba}$. **D.** $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{c}$.

Lời giải. Ta có $ac=b^2\Rightarrow\frac{1}{b^2}=\frac{1}{ac}\longrightarrow$ **Chọn B.**

Câu 68. Bốn góc của một tứ giác tạo thành cấp số nhân và góc lớn nhất gấp 27 lần góc nhỏ nhất. Tổng của góc lớn nhất và góc bé nhất bằng:

A. 56^0. **B.** 102^0. **C.** 252^0. **D.** 168^0.

Lời giải. Giả sử 4 góc *A, B, C, D* (với $A<B<C<D$) theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân thỏa yêu cầu với công bội q. Ta có

$$\begin{cases}A+B+C+D=360\\ D=27A\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A\left(1+q+q^2+q^3\right)=360\\ Aq^3=27A\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}q=3\\ A=9\\ D=Aq^3=243\end{cases}\Rightarrow A+D=252.$$

Chọn C.

Câu 69. Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nữa diện tích của mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích của đế tháp (có diện tích là $12\ 288\ m^2$). Tính diện tích mặt trên cùng.

A. $6\,m^2$. **B.** $8\,m^2$. **C.** $10\,m^2$. **D.** $12\,m^2$.

Lời giải. Diện tích bề mặt của mỗi tầng (kể từ 1) lập thành một cấp số nhân có công bội $q=\frac{1}{2}$ và $u_1=\frac{12\,288}{2}=6\,144$. Khi đó diện tích mặt trên cùng là

$$u_{11}=u_1q^{10}=\frac{6144}{2^{10}}=6\longrightarrow \textbf{Chọn A.}$$

Câu 70. Một du khách vào chuồng đua ngựa đặt cược, lần đầu đặt 20000 đồng, mỗi lần sau tiền đặt gấp đôi lần tiền đặt cọc trước. Người đó thua 9 lần liên tiếp và thắng ở lần thứ 10. Hỏi du khác trên thắng hay thua bao nhiêu?

A. Hòa vốn. **B.** Thua 20000 đồng.

C. Thắng 20000 đồng. **D.** Thua 40000 đồng.

Lời giải. Số tiền du khác đặt trong mỗi lần (kể từ lần đầu) là một cấp số nhân có $u_1 = 20\ 000$ và công bội $q = 2$.

Du khách thua trong 9 lần đầu tiên nên tổng số tiền thua là:

$$S_9 = u_1 + u_2 + ... + u_9 = \frac{u_1\left(1 - p^9\right)}{1 - p} = 10220000$$

Số tiền mà du khách thắng trong lần thứ 10 là $u_{10} = u_1.p^9 = 10240000$

Ta có $u_{10} - S_9 = 20\ 000 > 0$ nên du khách thắng 20 000. **Chọn C**.